ner Auswahlmenge kann nicht als Vorgang in der Zeit gedacht werden, als welche sie an die maximale Signalgeschwindigkeit der speziellen Relativitätstheorie gebunden wäre. Funktionale Zuordnungen und Abbildungen werden in der Mathematik nicht als Vorgänge in der physikalischen Zeit gedacht, sondern in einer idealen Simultaneität. Deshalb spricht auch nichts dagegen, sich den Auswahlvorgang so vorzustellen, daß für die erste Wahl ½ Sekunde, für die zweite ¼ und für die n-te Wahl $(1/2)^n$ Sekunden veranschlagt werden, womit alle unendlich vielen Auswahlen für $n \to \infty$ abgeschlossen wären.[210] Wenn man die positivistische Argumentation des Konstruktivismus durch die hypothetisch-deduktive Denkweise ersetzt, erschließt sich der Sinn des Auswahlprinzips von seinen Konsequenzen her, nämlich von seiner Begründungsleistung. Hier besteht kein Zweifel, daß wesentliche Teile der modernen Mathematik, der Algebra, der Topologie und Maßtheorie auf dem Auswahlprinzip beruhen.[211] Ein Axiom kann niemals begründet, sondern nur motiviert werden, und eine entscheidende Motivation für die Akzeptanz ist eben die Fruchtbarkeit, vorausgesetzt, die Verträglichkeit mit den übrigen Postulaten der Theorie ist gegeben.

Die anfängliche Furcht, daß das Auswahlaxiom (engl. Axiom of Choice, AC) mit den übrigen Axiomen von ZF in Widerspruch stehen könnte, hat sich nicht bestätigt. Gödel (1938) und Paul Cohen (1963) konnten zeigen, daß ZF mit AC und genauso mit ¬AC verträglich ist, was bedeutet, daß AC unabhängig ist von den Axiomen von ZF. Es war zu erwarten, daß die Konstruktivisten AC ablehnen würden, weil dem Axiom kaum ein Hinweis zu entnehmen ist, wie man bei einem Ensemble von unendlichen Mengen eine Auswahlfunktion finden könnte. Die Dringlichkeit eines Beweises des von Cantor intuitiv für wahr gehaltenen Denkgesetzes geht auch aus der Tatsache hervor, daß die effektive Etablierung einer Wohlord-

210 A. Fraenkel: Mengenlehre und Logik, a. a. O. S. 39. In der Sprache der Turingmaschinen müßte man sich eine beschleunigte Maschine vorstellen, die in endlicher Zeit unendlich viele Vorgänge erledigen kann.

211 Daneben lassen sich mit dem Auswahlaxiom auch solche paradoxen Ergebnisse ableiten wie das Theorem von Banach-Tarski, wonach sich aus einer Kugel mit Hilfe einer endlichen Zerlegung zwei gleich große Kugeln herstellen lassen.

nung für beliebige unendliche Mengen eine schwierige Aufgabe ist. Dabei tritt auch die kategoriale Differenz des Endlichen und des Unendlichen wieder deutlich zutage, weil jede Ordnung einer endlichen Menge automatisch eine Wohlordnung ist.[212]

15. Die Zähmung des Unendlichen

In kaum einer Epoche der Geschichte der Mathematik haben erkenntnistheoretische Argumente eine so zentrale Rolle gespielt wie als es darum ging, das Unendliche zu bändigen. Damit bestätigt sich die eingangs vertretene These, daß die philosophischen, also die logischen und erkenntnistheoretischen Probleme in der Mathematik nicht auf externe theoriefremde Aspekte zurückgehen, sondern aus den internen Schwierigkeiten der Disziplinen selbst erwachsen sind. Dort traten die kontroversen Meinungen zutage, ob man die Mathematik auf die Urintuition der natürlichen Zahl oder auf eine sinnliche Gegebenheit wie ein Zeichen aufbauen soll oder ob formale Existenz mit Konstruierbarkeit gleichzusetzen ist. Überdies stellte sich heraus, daß auch der Begriff der Konstruierbarkeit alles andere als eindeutig war, was wiederum zur Aufspaltung der intuitionistischen Haltung und auch zu der halbintuitionistischen Position von Hermann Weyl führte. Die Akzeptanz des Intuitionismus wurde wesentlich durch die schwerfällige Diktion und Terminologie Brouwers behindert, aber auch aufgrund der Beeinflussung dieser Richtung seitens undurchsichtiger philosophischer Strömungen wie die Phänomenologie Husserls. In der Mathematikergemeinde machte Brouwer sich einen Namen durch seine bahnbrechenden Untersuchungen in der Topologie: So konnte er den Fixpunktsatz beweisen, wonach bei jeder stetigen Transformation einer Kreisscheibe auf sich selbst immer ein Punkt fest bleibt.[213] Später erweiterte er den Fixpunktsatz auf Einheitskugeln beliebiger (endlicher) Dimensionen. Auch die korrekte Fassung des

212 A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre, a. a. O. S. 182

213 Für eine verständliche Darstellung des Beweises vgl. R. Courant/H. Robbins: Was ist Mathematik? S. 192

Dimensionsbegriffs als topologische Invariante geht auf ihn zurück. Ebenso konnte er den Jordanschen Kurvensatz auf n Dimensionen verallgemeinern.[214] Seine Hauptaufgabe sah er aber in einer Begründung der Mengenlehre, die keinen Gebrauch vom logischen Prinzip des ausgeschlossenen Dritten (TND) macht. Er konnte zeigen, daß die Annahme, wonach jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung besitzt, zu der für ihn unannehmbaren Konsequenz des nichtkonstruktivistischen Tertium non datur

$$\forall P \forall n \in N(P(n) \vee \neg P(n))$$

führt.[215] Die Ablehnung des seit Aristoteles unbezweifelten Denkgesetzes der klassischen Mathematik hat auch mit der Einstellung der Intuitionisten zur Existenz mathematischer Gegenstände zu tun, wie Arend Heyting, ein Schüler Brouwers, klarmacht.[216] Die Existenz einer Zahl mit einer bestimmten Eigenschaft bedeutet intuitionistisch, die Zahl wirklich aufzuweisen, und die Nichtexistenz bedeutet die Möglichkeit, diese Eigenschaft auf einen Widerspruch zurückzuführen. Reelle Zahlen werden demnach durch Wahlfolgen festgelegt, die ein Moment der Willkür enthalten, und nicht durch ein Gesetz.

Trotz der Verschiedenheiten in den intuitionistischen Schulrichtungen läßt sich so etwas wie eine Familienähnlichkeit zwischen den Gruppierungen konstatieren. Sie liegt in der Bedingung der *Endlichkeit* nicht nur der menschlichen Handlungen, sondern auch der mathematischen Objektwelt, die man sich aus dieser Sicht nicht als ein unendlich ausgebreitetes Ganzes vorstellen darf, sondern ein im Werden begriffenes Netz von Beziehungen, das sich im Denken entfaltet. Damit geht in die Grundlagen der Mathematik eine ontologische Hypothese ein, die in der Nähe des Konzeptualis-

214 Dieser besagt, daß eine einfache geschlossene Kurve C in einer Ebene diese genau in zwei Gebiete teilt, das Innere und das Äußere, wobei zwei Punkte, die in verschiedenen Gebieten liegen, nur durch eine Kurve verbunden werden können, die C schneidet.

215 Ch. McCarty: Constructivism in Mathematics, in: A. D. Irvine: Philosophy of Mathematics, a. a. O. S. 322

216 A. Heyting: Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. Erkenntnis (1931), S. 106–115

mus angesiedelt ist.[217] Dementsprechend ist es für den Intuitionismus schwierig, eine Erklärung für den Anwendungserfolg der Mathematik in der physikalischen Realität zu geben. Wenn die mathematischen Strukturen und Quantitäten allein mental verortet werden, bleibt es ein Rätsel, warum wir mit Hilfe der klassischen Himmelsmechanik eine Raumsonde auf einem Kometen landen lassen können.

Aus dem Vorstehenden wird verständlich, daß J. L. Brouwer die skeptische Position bezüglich des aktual Unendlichen[218], wie sie im 19. Jahrhundert L. Kronecker vertreten hatte, fortsetzte und sie zudem mit der Ablehnung des Prinzips der doppelten Negation[219] verband. Das Mißtrauen gegenüber einem fertigen, abgeschlossenen Unendlichen war seit Kants Kritik in der Wissenschaftsgemeinschaft latent vorhanden. In der transzendentalen Dialektik nennt er vier Konflikte des Verstandes mit sich selbst, in zwei von ihnen ist das Unendliche involviert: die räumliche Ausdehnung und die zeitliche Erstreckung des Universums sowie die begrenzte und unbegrenzte Teilbarkeit der Materie.[220] Zudem spielt bei Kant

217 H. Weyl: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Mathematische Zeitschrift Bd. 10 (1921), S. 39–79

218 Auch bei Brouwer spielt diese Voreinstellung der Endlichkeit im Kleinen und im Großen eine entscheidende Rolle, weshalb er die Atomistik und die Endlichkeit des Weltalls befürwortet. (L. E. J. Brouwer: Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 33 [1925], S. 251–256)

219 Genauer gesagt, lehnten die Intuitionisten das Urteil der aristotelischen Logik ab, wonach man von der Negation des allgemeinen Urteils „Alle Menschen sind sterblich“ auf den Existenzsatz „mindestens ein Mensch ist unsterblich“ übergehen darf. Aristoteles hatte drei Gesetze der Logik als evident und einer Begründung weder fähig noch bedürftig bezeichnet: Das Prinzip der Identität, den Satz vom (zu vermeidenden) Widerspruch und den Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Die Ablehnung dieses letzten Prinzips durch die Intuitionisten kennzeichnet deren gebrochenes Verhältnis zur (traditionellen) Logik schlechthin; mathematisches Denken ereignet sich vorsprachlich, und Sprache dient nur der zwischenmenschlichen Kommunikation.

220 I. Kant: Kritik der reinen Vernunft (1781), Hamburg 1956, A 426 B 454. Der Widerstreit dieser beiden transzendentalen Ideen ist allerdings von den empirischen Wissenschaften überrollt worden; das Standardmodell der physikalischen Kosmologie lehrt eine unendliche Erstreckung des Raums und eine endliche Vergangenheit der kosmischen Zeit sowie eine unendliche Zukunft. Das Standardmodell des Aufbaus der Materie ist ohne Zweifel atomistischer Natur.

auch die reine Anschauung als das Vermögen, nichtsinnliche Bedeutungen und Ideen zu ergreifen, eine wichtige Rolle.[221]

Brouwer orientiert sich dann insbesondere an der apriorischen Anschauungsform der Zeit; sie liefert die Voraussetzung und den Rahmen, innerhalb dessen die Zahlen schrittweise konstruiert werden können.[222] Die in der Zeit von einem Individuum in der reinen Anschauung gebildeten Vielheiten stellen den Fundamentalvorgang der Konstitution von Zahlen dar. Diese Fundierung des Zahlbereichs in der Anschauung führt Brouwer dazu, die Mathematik von der Sprache abzuheben – in starkem Gegensatz zum Formalismus, der die Zahlenwelt allererst in der Struktur von Zeichen verankern wollte. Zahlen entstehen nach Brouwer iterativ durch den introspektiven Prozeß der Hinzufügung weiterer Einheiten in der Zeit, wodurch im strengen Sinne nur endliche mathematische Objekte erzeugt werden können. Unendliche abstrakte Objekte können nur als unfertige Konstruktionsergebnisse betrachtet werden, weil deren Vollendung endlichen Vernunftwesen versagt bleibt. Zweifel sind allerdings berechtigt, ob es zweckmäßig ist, den systematischen Aufbau der Mathematik an das biologische Faktum zu binden, daß sterbliche Organismen in ihrem Leben nur endlich viele Einheiten aneinanderreihen können.

Methodisch zeigt sich hier eine Parallele zum induktiven Verfahren in den faktischen Wissenschaften, mit dem von empirischen Basissätzen Hypothesen und Theorien aufgebaut werden sollten. Abgesehen davon, daß sich die Induktion logisch nicht rechtferti-

Quarks und Leptonen sind Teilchen, aber wie alle Quantenobjekte besitzen sie auch Welleneigenschaften. Damit liegt das Modell windschief zur kantischen Antinomie.

221 I. Kant: Kritik der reinen Vernunft, B 15. Schon vorher hatte Descartes in seiner 6. Meditation am Beispiel des Chiliagons, des Polygons mit 1000 Seiten, die Differenz von Vorstellbarkeit und Verstandeseinsicht verdeutlicht. Anschaulich können wir das Chiliagon nicht begreifen, die Vorstellung liefert nur ein verschwommenes Bild, das sich von einem Myriagon, einem 10 000-Eck, kaum unterscheidet. Der Intellekt kann jedoch eine klare Idee hervorbringen, bei der die Eigenschaften, wie die Symmetriegruppe und die Innenwinkel, deutlich spezifiziert werden können.

222 Für Einzelheiten vgl. B. Kanitscheider: Zahl und Zeit. Philosophia Naturalis 49, 2 (2012), S. 293–317

gen ließ, zeigte sie sich auch der hypothetisch-deduktiven Methode unterlegen, bei der man mit nichtempirischen theoretischen Entitäten arbeiten konnte und sich erst im nachhinein durch Ausarbeitung der Konsequenzmenge der Axiome deren Bewährung ergab. Jemand mag Zweifel haben, ob es Schwarze Löcher gibt, aber er kann nicht Einsteins Gravitationstheorie akzeptieren und die daraus abgeleiteten Endstadien des Gravitationskollapses ablehnen; wenn er die dunklen Objekte vermeiden will, muß er eine neue Gravitationstheorie entwickeln, die keine kollabierenden Sterne voraussagt. Dann muß er allerdings die Röntgensignale der Akkretionsscheibe um das Schwarze Loch anders erklären. Analog kann man mit den theoretischen Entitäten der Mathematik umgehen. Es läßt sich auch hier die Kette der Unendlichkeiten weit über den Erfahrungsbereich hinaus gesetzesartig aufbauen, was man an der Reihe der Ordnungszahlen verifizieren kann.[223] Sei $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dann läßt sich der Zählvorgang nach einem festen Bildungsgesetz über das Unendliche hinaus fortführen, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots\ \omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, $\ldots\ \omega \cdot 3$, $\ldots$ letztlich bis $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ wobei das Exponentiieren selbst abzählbar unendlich oft vorkommen kann. Eine Ordnungszahl, die durch eine unendliche Potenz von ω hoch ω entsteht, nennt man Epsilonzahl. Für sie gilt die Relation $\omega^{\varepsilon} = \varepsilon$, und der Zählvorgang geht weiter $\varepsilon + 1 \ldots$ Mit diesen ε-Zahlen kann man eine Funktion definieren $f(\alpha) = \omega^{\alpha}$. Dann ist ε_0 der erste Fixpunkt dieser Funktion von Ordinalzahlen.[224]

Die Rechtfertigung dieser gigantischen Fortführung der gewöhnlichen Ordinalzahlen ins Transfinite liegt einmal im Moment der Freiheit, wie Cantor immer betont hat, aber auch im konsistenten Anschluß an das Vorhandene. Die Eigenständigkeit der Konstruktion neuer Zahltypen ist also nicht beliebig, die Kontrolle erfolgt durch den Konnex mit dem Bewährten. Transfinites Zählen ist ein Gedankenprozeß, aber kein physischer Vorgang. Es schließt sich gesetzesartig an das sinnliche Zählen an, ist aber toto genere

223 A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre, a. a. O. S. 190

224 Der Fixpunkt einer Funktion f ist ein Wert x vom Geltungsbereich von f, so daß $f(x) = x$.

davon verschieden. G. Cantor macht den häufigsten methodischen Fehler aller Kritiker von neuen Zahlformen deutlich:

> „Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, … der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft und darin liegt ihr πρῶτον ψεῦδος, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während die unendlichen Zahlen doch andrerseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist."[225]

Damit ist die Autonomie des Reiches der neuen unendlichen Zahlen und dessen Eigengesetzlichkeit deutlich formuliert.

Es ist zudem keineswegs zweckmäßig, diese Art von Zahlen mit der empirischen conditio humana, der Endlichkeit epistemischer Fähigkeiten, in Zusammenhang zu bringen. Unendliche Zahlen überschreiten jede Erfahrung, aber ihre Gesetze sind für die Vernunft einsichtig. Methodisch gesehen hat man es, wie schon erwähnt, mit einer ähnlichen Situation zu tun wie in der theoretischen Physik, wo nichtempirische Entitäten toleriert werden, vorausgesetzt, die Theorie läßt sich an irgendeiner Stelle überprüfen. Es ist keineswegs erforderlich, die Theorie an allen Stellen zu überprüfen, und sie gilt auch dann noch als wissenschaftlich, wenn sie Aussagen über epistemisch absolut unzugängliche Bereiche macht. Eine physikalische Theorie wird an ihrer Erklärungsleistung evaluiert und eine mathematische Theorie an der Beweisleistung ihrer Axiome. Ob diese dabei Entitäten umfassen, die alle Erfahrung transzendieren, ist aus der Sicht der traditionellen Mathematik ir-

225 G. Cantor: Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuell Unendliche. Ges. Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin 1932, S. 371