1 Grundlagen

1.1 Maßeinheiten und ihre Umwandlungen

Längen

$$1\text{ km} \xrightarrow{:1000} 1\text{ m} \xrightarrow{:10} 1\text{ dm} \xrightarrow{:10} 1\text{ cm} \xrightarrow{:10} 1\text{ mm}$$

1 km	=	1000 m
1 m	=	10 dm
1 dm	=	10 cm
1 cm	=	10 mm

Flächeninhalte

$$1\text{ km}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ ha} \xrightarrow{:100} 1\text{ a} \xrightarrow{:100} 1\text{ m}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ dm}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ cm}^2 \xrightarrow{:100} 1\text{ mm}^2$$

1 km^2	=	100 ha	1 m^2	=	100 dm^2
1 ha	=	100 a	1 dm^2	=	100 cm^2
1 a	=	100 m^2	1 cm^2	=	100 mm^2

Die Umwandlungszahl ist 100.

Rauminhalte (Volumina)

$$1\text{ m}^3 \xrightarrow{:1000} 1\text{ dm}^3 \xrightarrow{:1000} 1\text{ cm}^3 \xrightarrow{:1000} 1\text{ mm}^3$$

1 m^3	=	1000 dm^3	1 cm^3	=	1 ml
1 dm^3	=	1000 cm^3	1 dm^3	=	1 l
1 cm^3	=	1000 mm^3	1 l	=	1000 ml

Die Umwandlungszahl ist 1000.

Gewichte (Massen)

$$1\text{ t} \xrightarrow{:1000} 1\text{ kg} \xrightarrow{:1000} 1\text{ g} \xrightarrow{:1000} 1\text{ mg}$$

1 t	=	1000 kg
1 kg	=	1000 g
1 g	=	1000 mg

Die Umwandlungszahl ist 1000.

Zeitspannen

1 d = 24 h; 1 h = 60 min; 1 min = 60 s
(d bedeutet Tag, h bedeutet Stunde)

1.2 Bruchzahlen

Gewöhnliche Brüche

Gewöhnliche Brüche sind z. B.: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$ usw.

Die Zahl über dem Bruchstrich heißt Zähler, die Zahl unter dem Bruchstrich ist der Nenner. Der Nenner des Bruches gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird. Der Zähler gibt an, wie viele solche Teile davon vorhanden sind.

Gemischte Schreibweise

$2\frac{3}{4}$ bedeutet $2+\frac{3}{4}$

Beispiele: $2\frac{3}{4} = 2+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

$$\frac{13}{5} = \frac{10}{5}+\frac{3}{5}=2+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}$$

Kürzen und Erweitern

Man kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner durch dieselbe natürliche Zahl dividiert.

Beispiel: $\frac{3}{27} = \frac{3:3}{27:3}=\frac{1}{9}$

Man erweitert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.

Beispiel: $\frac{1}{9} = \frac{1\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{4}{36}$

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Man addiert (subtrahiert) gleichnamige (gleiche Nenner) Brüche, indem man die Zähler addiert (subtrahiert). Der Nenner bleibt unverändert. Ungleichnamige Brüche (unterschiedliche Nenner) müssen zuerst gleichnamig gemacht werden.

Beispiele: $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$

Multiplizieren von Brüchen

Man multipliziert Brüche, indem man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziert.

Beispiel: $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

Dividieren von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

Beispiel: $\frac{3}{8}:\frac{2}{3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{16}$

1.3 Dreisatzrechnung

Bei der Dreisatzrechung muss zwischen proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen unterschieden werden.

Proportionale Zuordnungen

Für proportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen, etc.) einer Größe gehört das Doppelte (Dreifache etc.) der zugeordneten Größe.
Zur Hälfte (zum dritten Teil etc.) gehört die Hälfte (der dritte Teil, etc.) der zugeordneten Größe.

Beispiel: Für Spaghetti Bolognese für vier Personen benötigt man 480 g Spaghetti. Wie viel g Spaghetti benötigt man für 7 Personen?

	Personen	Spaghetti	
	4	480 g	
: 4			: 4
	1	120 g	
·7			·7
	7	840 g	

Ergebnis: Für 7 Personen benötigt man 840 g Spaghetti.

Noch einfacher ist dieser Rechenweg zu praktizieren:

4 Personen $\Leftrightarrow$ 480 g Spaghetti
7 Personen $\Leftrightarrow$ *x* g Spaghetti

$$x = \frac{7\,\textit{Personen} \cdot 480 \text{ g}}{4\,\textit{Personen}}$$

$$x = 840 \text{ g}$$

Antiproportionale Zuordnungen

Für antiproportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen, etc.) einer Größe gehört die Hälfte (der dritte Teil, etc.) der zugeordneten Größe
Zur Hälfte (zum dritten Teil, etc.) einer Größe gehört das Doppelte (das Dreifache, etc.) der zugeordneten Größe.

Beispiel: Für eine Studienfahrt erhält ein Kurs einen Fahrtkostenzuschuss. Wenn alle 30 Teilnehmer mitfahren, erhält jeder 15,– Euro. Es fahren aber nur 25 Teilnehmer mit. Wie hoch ist nun der Zuschuss für jeden Kursteilnehmer?

	Teilnehmer	Zuschuss	
	30	15,– €	
: 6			· 6
	5	90,– €	
· 5			: 5
	25	18,– €	

Antwort: Jeder Kursteilnehmer erhält einen Zuschuss von 18,– Euro.

Noch einfacher geht es mit diesem Rechenweg:

30 Teilnehmer $\Leftrightarrow$ 15,– €

25 Teilnehmer $\Leftrightarrow$ *x* €

$$x = \frac{30\,\textit{Teilnehmer} \cdot 15{,}- \text{ €}}{25\,\textit{Teilnehmer}}$$

$$x = 18{,}- \text{ €}$$

1.4 Binomische Formeln

Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert.

1. Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beispiele: (1) $(2x+7)^2 = (2x+7)\cdot(2x+7) = 4x^2 + 14x + 14x + 49$

$= 4x^2 + 28x + 49$

(2) $(3xy+5)^2 = (3xy+5)\cdot(3xy+5)$

$= 9x^2y^2 + 15xy + 15xy + 25 = 9x^2y^2 + 30xy + 25$

2. Binomische Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Beispiele: (1) $(5y-z)^2 = (5y-z)\cdot(5y-z) = 25y^2 - 5yz - 5yz + z^2$

$= 25y^2 - 10yz + z^2$

(2) $(8x-8y)^2 = (8x-8y)\cdot(8x-8y)$

$= 64x^2 - 64xy - 64xy + 64y^2$

$= 64x^2 - 128xy + 64y^2$

3. Binomische Formel:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Beispiele: (1) $(y+3x)\cdot(y-3x) = y^2 - 3xy + 3xy - 9x^2 = y^2 - 9x^2$

(2) $(4x+12)\cdot(4x-12) = 16x^2 - 48x + 48x - 144$

$= 16x^2 - 144$

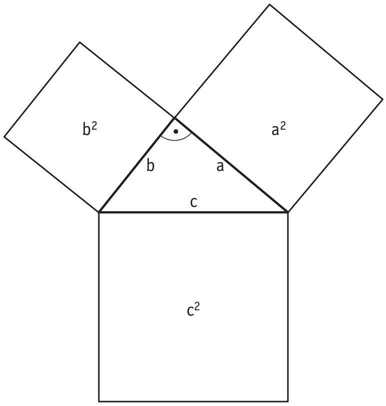
1.5 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras)

1.5.1 Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

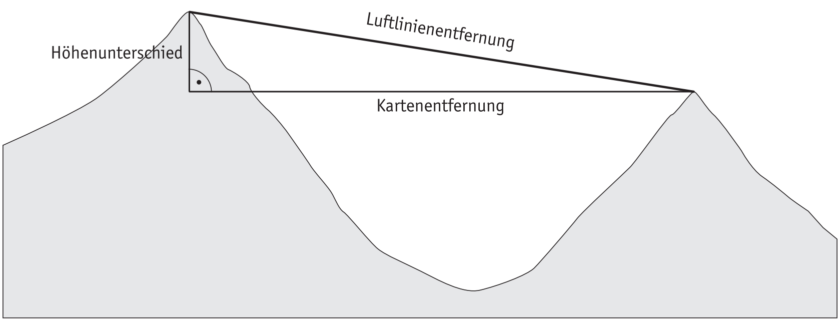
$a^2 + b^2 = c^2$

a: Länge der einen Kathete
b: Länge der anderen Kathete
c: Länge der Hypotenuse



Die beiden Katheten schließen den rechten Winkel ein, die Hypotenuse liegt diesem gegenüber.

Beispiel 1: Es soll die Luftlinienentfernung zwischen den Gipfeln des Großglockners (3797 m) und des Hahnlberges (2634 m) bestimmt werden. Aus der Landkarte kann eine Entfernung von 7,6 km abgelesen werden.



Rechnung: Der Höhenunterschied der beiden Gipfel beträgt 1163 m. Gemeinsam mit der Entfernung von 7600 m kann nun über den Pythagoras die Luftlinienentfernung bestimmt werden.

$$(1163\ \text{m})^2 + (7600\ \text{m})^2 = x^2$$

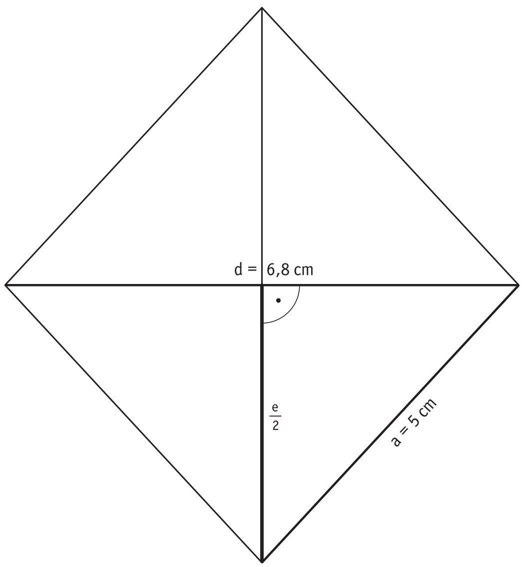
$$1.352.569\ \text{m}^2 + 57.760.000\ \text{m}^2 = x^2$$

$$59.112.569\ \text{m}^2 = x^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$7.688{,}47\ \text{m} = x$$

Die Luftlinienentfernung der beiden Gipfel voneinander beträgt somit 7,68847 km.

Beispiel 2: In einer Raute mit einer Seitenlänge von 5 cm ist eine Diagonale 6,8 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat die Raute?



Rechnung: Zuerst muss die Länge der anderen Diagonale bestimmt werden.

Gegeben: $a = 5\ \text{cm}$

$$d = 6{,}8\ \text{cm}; \frac{d}{2} = 3{,}4\ \text{cm}$$

$$(3{,}4\ \text{cm})^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (5\ \text{cm})^2$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = (5\ \text{cm})^2 - (3{,}4\ \text{cm})^2$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = 13{,}44\ \text{cm}^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\frac{e}{2} = 3{,}67\ \text{cm} \qquad / \cdot 2$$

$$e = 7{,}34\ \text{cm}$$

Der Flächeninhalt der Raute ergibt sich nun aus dem Produkt der Länge der einen Diagonalen multipliziert mit der Hälfte der Länge der anderen Diagonalen.

$$A = d \cdot \frac{e}{2}$$

$$A = 6{,}8\ \text{cm} \cdot 3{,}67\ \text{cm} = 24{,}96\ \text{cm}^2$$

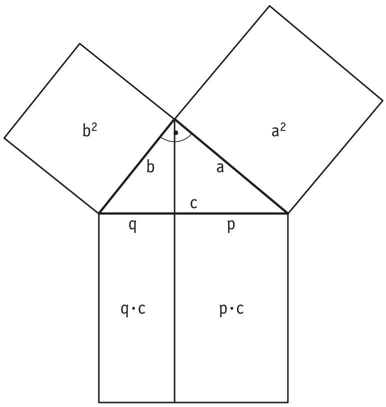
Die Raute hat einen Flächeninhalt von 24,96 cm^2.

1.5.2 Der Kathetensatz

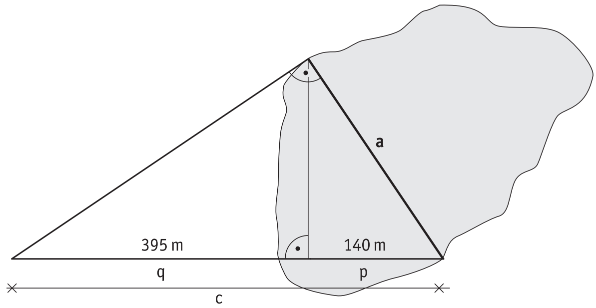
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt eines Kathetenquadrates genauso groß wie der der Flächeninhalt des Rechteckes aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = q \cdot c$$

p, q: Länge der Hypotenusenabschnitte



Beispiel: Zu bestimmen ist die Entfernung von dem einen Seeufer zum anderen.



Rechnung: Gegeben: $c = p + q = 535\ \text{m}$
$p = 140\ \text{m}$

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 535\ \text{m} \cdot 140\ \text{m}$

$a^2 = 74.900\ \text{m}^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$a = 273{,}68\ \text{m}$

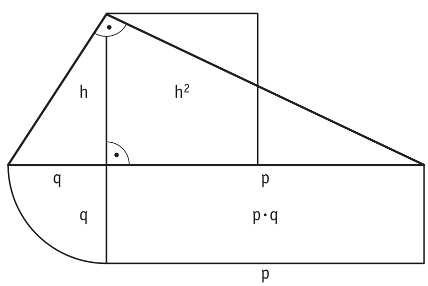
Die Entfernung der beiden Seeufer von einander beträgt 273,68 m.

1.5.3 Der Höhensatz

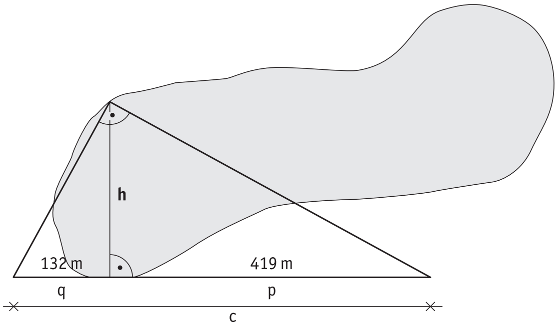
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$h^2 = p \cdot q$

h: Dreieckshöhe



Beispiel: Es soll die Entfernung von einem Seeufer zum anderen bestimmt werden.



Rechnung: Gegeben: $p = 419$ m $\quad q = 132$ m $\quad c = p + q = 551$ m

$h^2 = p \cdot q$

$h^2 = 419 \text{ m} \cdot 132 \text{ m}$

$h^2 = 55.308 \text{ m}^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$h = 235{,}18$ m

Die beiden Seeufer sind 235,18 m von einander entfernt.

1.6 Trigonometrie

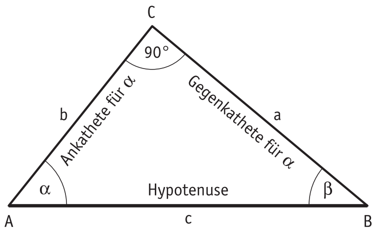
1.6.1 Sinus, Kosinus, Tangens für den Bereich 0° ≤ α ≤ 360°

Für spitze Winkel (im rechtwinkligen Dreieck) gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von }\alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete von }\alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von }\alpha}{\text{Länge der Ankathete von }\alpha} = \frac{a}{b}$$



Für den Punkt P_α $(x; y)$ auf dem Einheitskreis gilt:

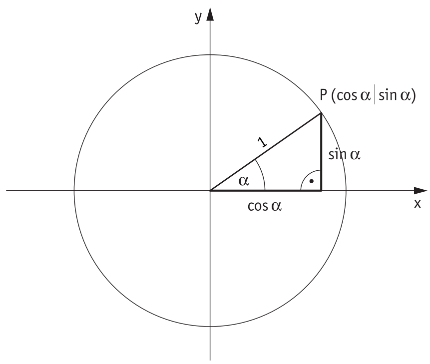
$\sin\alpha = y$; $\cos\alpha = x$

Für 0° $\leq \alpha \leq$ 180° gilt:	**Für 0° $\leq \alpha \leq$ 360° gilt:**
$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$	$\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$	$\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$
$\tan\alpha = -\tan(180° - \alpha)$	$\tan\alpha = -\tan(360° - \alpha)$

Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



1.6.2 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

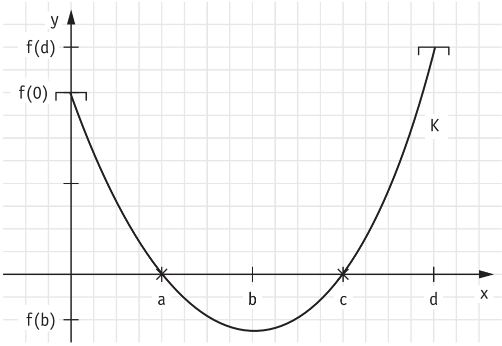
Aus zwei Seiten oder aus einer Seite und einem Winkel lassen sich die übrigen Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen.
Weil man jedes beliebige Dreieck mithilfe von Höhen in rechtwinklige Dreiecke zerlegen oder zu solchen ergänzen kann, können damit auch nicht-rechtwinklige Dreiecke berechnet werden und somit auch n-Ecke, die wiederum aus Teildreiecken bestehen.

2 Analysis

2.1 Funktionen

2.1.1 Definition von Funktionen

Eine Zuordnung f, die jedem $a \in D$ mit $\subseteq$ ℝ genau einen Wert f(a) $\in$ ℝ zuweist, heißt *reelle Funktion*. Wir nennen f(a) den *Funktionswert von f an der Stelle a*.
Ist $f(a) = 0$, so ist a eine *Nullstelle* von f. In der Regel wird *f* durch den Funktionsterm *f(x)* gegeben.
Das Schaubild K von f hat die Gleichung: $y = f(x)$.
$\mathbb{D}$ heißt *Definitionsbereich*, die Menge $\mathbb{W}$ aller Funktionswerte *Wertebereich* der Funktion f.
Die größtmögliche Teilmenge von ℝ, für die der Funktionsterm definiert ist, heißt *maximaler Definitionsbereich*.



$\mathbb{D} = [0; d]$
$\mathbb{W} = [f(b); f(d)]$
Nullstellen: a; c

2.1.2 Lineare Funktionen

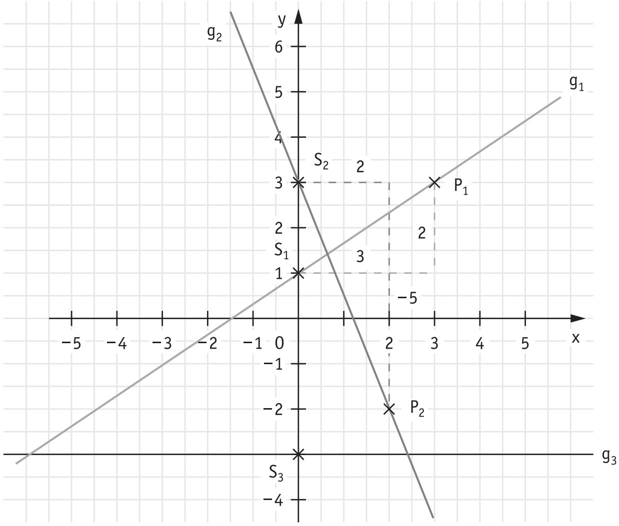
Eine Funktion vom Typ f mit $f(x) = mx + b$, $x \in \mathbb{R}$ ($m, b \in \mathbb{R}$) ist eine *lineare Funktion*.
Ihr Schaubild mit der Gleichung $y = mx + b$ heißt *Gerade*. Hierbei ist m die Steigung der Geraden und b der Schnittpunkt mit dem *y-Achse* (y-Achsenabschnitt).

Beispiele zum Zeichnen von Geraden:

(1) $g_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$

(2) $g_2 : y = -\frac{5}{2}x + 3$

(3) $g_3 : y = -3$



Zu (1) Da $b = 1$ ist, liegt der Schnittpunkt mit der y-Achse S_1 (0/1) auf der Geraden g_1. Mit der Steigung $m = \frac{2}{3}$ geht man von S_1 aus 3 Einheiten nach rechts (positive x-Richtung) und 2 Einheiten nach oben (positive y-Richtung), um einen weiteren Punkt der Geraden zu erhalten. Kurz: Nenner der Steigung in x-Richtung, Zähler in y-Richtung. So erhält man den 2. Punkt P_1 (3/3) zum Zeichnen der Geraden.

Zu (2) Aus $b = 3$ folgt S_2 (0/3) $\in g_2$. Da die Steigung $m = -\frac{5}{2}$ ein negatives Vorzeichen hat, geht man dieses Mal 2 Einheiten in positive x-Richtung und 5 Einheiten in negative y-Richtung, also nach unten und erhält so P_2 (2/-2).

Zu (3) Aus $b = -3$ folgt S_3 (0/-3) $\in g_3$. Da hier die Steigung $m = 0$ ist, verläuft g_3 parallel zur x-Achse.

Zu beachten:

Für lineare Funktionen gilt: $f(x+1) = m(x+1) + b = mx + m + b = f(x) + m$. Das bedeutet, bei Vergrößerung (Verkleinerung) eines beliebigen x-Wertes um 1 wird der zugehörige y-Wert um die Steigung m größer (kleiner).
Mit dieser Eigenschaft kann man von einem beliebigen Punkt der Geraden ausgehend weitere Punkte erhalten.

Geradengleichungen

P (x/y) ist ein beliebiger Punkt einer Geraden

Hauptform: $g\colon y = mx + b$

m ist die Steigung und b der y-Achsenabschnitt der Geraden.

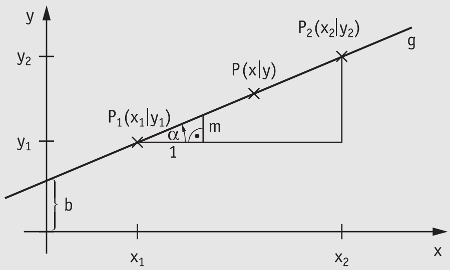
Punktsteigungsform: $g\colon \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

m ist die Steigung und $P_1(x_1/y_1)$ ein gegebener Punkt der Geraden.

Zweipunkteform: $g\colon \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ sind zwei gegebene Punkte der Geraden mit $x_1 \neq x_2$.

Allgemeine Geradengleichung: $g\colon ax + by + c = 0; \quad a, b \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0 \vee b \neq 0$



Zwischen dem Steigungswinkel der Weite $\alpha(-90^\circ < \alpha < 90^\circ)$ und der Steigung m besteht die Beziehung: $\tan\alpha = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Beispiele zum Bestimmen von Geradengleichungen:

(1) gegeben: $P(4/3); m = \dfrac{1}{2}$

Punktsteigungsform $\dfrac{y-3}{x-4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y - 3 = \dfrac{1}{2} \cdot (x-4) \Leftrightarrow y - 3 = \dfrac{1}{2}x - 2$

$g: y = \dfrac{1}{2}x + 1$

(2) gegeben: $P_1(-4/-2); P_2(4/4{,}5)$

Zweipunkteform $\dfrac{y-(-2)}{x-(-4)} = \dfrac{4{,}5-(-2)}{4-(-4)} \Leftrightarrow \dfrac{y+2}{x+4} = \dfrac{6{,}5}{8}$

$$\frac{y+2}{x+4} = \frac{13}{16} \Leftrightarrow y+2 = \frac{13}{16}\cdot(x+4)$$

$$g: y = \frac{13}{16}x - \frac{5}{4}$$

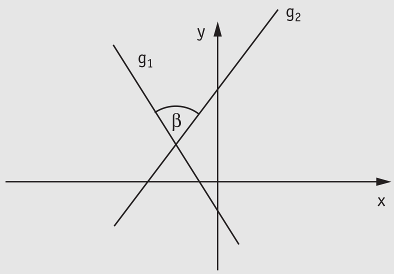
Schnittwinkel von Geraden, Orthogonalität, Parallelität

Zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Steigungen m_1 und m_2 bilden einen Schnittwinkel der Weite $\beta\,(0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ)$.

Dabei gilt: $\tan\beta = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1\cdot m_2}\right|$ wenn $m_1\cdot m_2 \neq -1$

Die Geraden sind orthogonal $(\beta = 90^\circ)$ wenn $m_1\cdot m_2 = -1$

Die Geraden sind parallel $(\beta = 0^\circ)$ wenn $m_1 = m_2$



Beispiel: Welche der nachfolgenden Geraden sind zueinander orthogonal (parallel)?

$g_1: y = -5x + 1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -5$

$g_2: y = 0{,}2x + 3 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

$g_3: y = 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad m_3 = 4$

$g_4: y = -5x - 7 \quad \Rightarrow \quad m_4 = -5$

$m_1\cdot m_2 = -5\cdot\dfrac{1}{5} = -1 \quad \Rightarrow \quad g_1 \perp g_2$

$m_1\cdot m_3 = -5\cdot 4 = -20 \quad \Rightarrow \quad g_1$ weder $\perp$ noch $\parallel$ g_3

$m_1 = m_4 \quad \Rightarrow \quad g_1 \parallel g_4$

$$m_2 \cdot m_3 = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad g_2 \text{ weder } \perp \text{ noch } \parallel g_3$$
$$m_2 \cdot m_4 = -5 \cdot \frac{1}{5} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad g_2 \perp g_4$$
$$m_3 \cdot m_4 = 4 \cdot -5 = -20 \qquad \Rightarrow \qquad g_3 \text{ weder } \perp \text{ noch } \parallel g_4$$

Länge und Mittelpunkt einer Strecke

Gegeben sind die Punkte $P_1\ (x_1/y_1)$ und $P_2\ (x_2/y_2)$.

Für die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ gilt $\left|\overline{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} / \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Beispiele:

(1) Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$?

Gegeben: $A(4/-7)$; $B(-4/8)$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-4-4)^2 + (8-(-7))^2} = \sqrt{64+225}$$
$$= \sqrt{289} = 17LE \qquad \text{(Längeneinheiten)}$$

(2) Wo liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{RS}$?

Gegeben: $R(3/-2)$ $S(5/6)$

$$x_m = \frac{3+5}{2} = 4 \qquad y_m = \frac{(-2)+6}{2} = 2 \quad \Rightarrow M(4/2)$$

2.1.2.1 Beispiele zum Lösen linearer Gleichungen

(1) $5x - 4 = 2(x-3) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 4 = 2x - 6 + 1$

$5x - 4 = 2x - 5 \quad / + 4; -2x$

$3x = -1 \quad / : 3$

$x = -\frac{1}{3} \qquad \mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

(2) $3(2x+1) = 6x \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 3 = 6x \quad /-6x$

$3 = 0 \qquad \mathbb{L} = \{\,\}$

(3) $2(x+1) - x = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 - x = x + 2$

$x + 2 = x + 2 \quad /-x; -2$

$0 = 0 \qquad \mathbb{L} = \mathbb{R}$

2.1.3 *Quadratische Funktionen*

Eine Funktion des Typs f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) heißt *quadratische Funktion*.
Ihr Schaubild mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist eine *quadratische Parabel 2. Ordnung*.
Sie besitzt den Scheitelpunkt $S\left(-\frac{b}{2a} / c - \frac{b^2}{4a}\right)$ und ist für $a > 0$ ($a < 0$) nach oben (unten) geöffnet. Für $|a| = 1$ kann man die Parabel mithilfe einer Parabelschablone zeichnen.

2.1.3.1 Eigenschaften der quadratischen Funktion $y = x^2$; $x \in \mathbb{R}$ (Normalparabel)

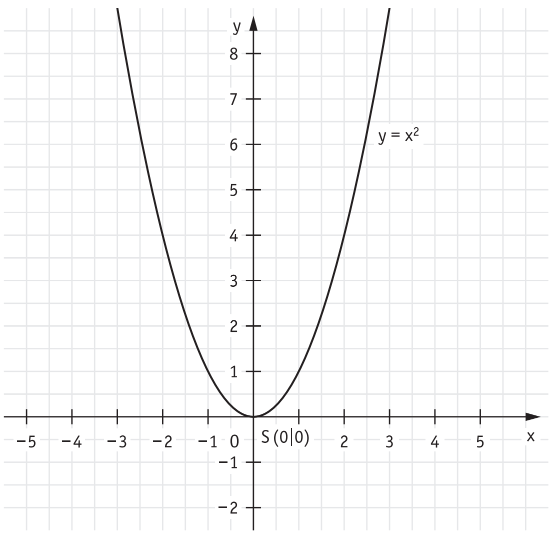
(a) Der Punkt $S(0/0)$ ist der *Scheitel* der Parabel; er fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen.

(b) Die Normalparabel ist *symmetrisch* zur y-Achse.

(c) Für alle x mit $x \leq 0$ ist die Funktion *streng monoton fallend*.
Für alle x mit $x \geq 0$ ist die Funktion *streng monoton steigend*.
Der Scheitel ist der tiefste Punkt der Normalparabel.

(d) Der Wertebereich der Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen y mit $y \geq 0$.

(e) $x_0 = 0$ ist die einzige Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse) der Funktion.



2.1.3.2 Eigenschaften der quadratischen Funktion mit $y = ax^2$; $x \in \mathbb{R}$

(a) Der Graph der Funktion $y = ax^2$ entsteht aus der Normalparabel
- durch Stauchung mit dem Faktor a in Richtung der y-Achse mit $0 < a < 1$
- durch Streckung mit dem Faktor a in Richtung der y-Achse mit $a > 1$
- durch Spiegelung an der x-Achse und Stauchung (Streckung) an der y-Achse mit $a < 0$.

(b) Der Punkt $S(0/0)$ ist der *Scheitel* der Parabel.

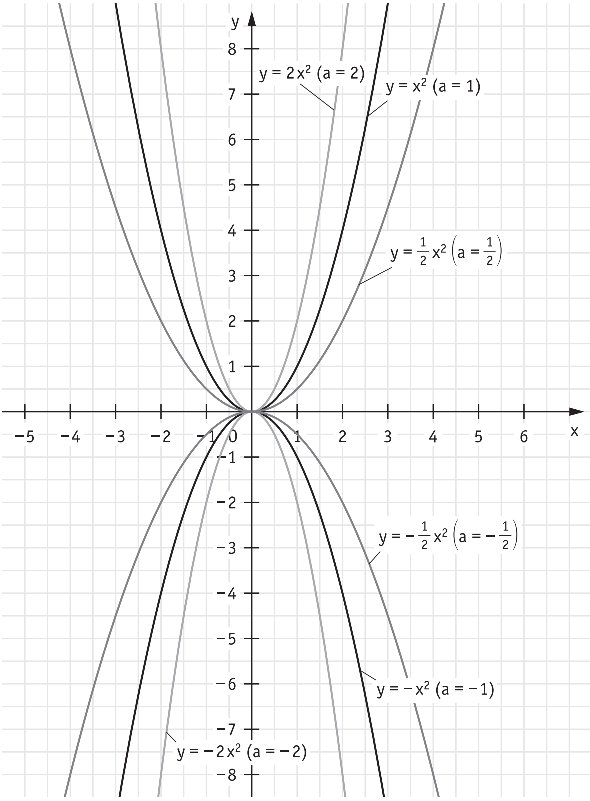
(c) Die Parabel ist *symmetrisch* zur y-Achse.

(d) Die Parabel ist nach unten geöffnet, wenn $a < 0$.

(e) Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$.

(f) Die Wertemenge der Funktion ist die Menge aller y mit $y \geq 0$, wenn $a > 0$ oder $y \leq 0$, wenn $a < 0$.

(g) $x_0 = 0$ ist einzige Nullstelle der Funktion.



2.1.3.3 Eigenschaften der quadratischen Funktion mit $y = x^2 + c$; $x \in \mathbb{R}$

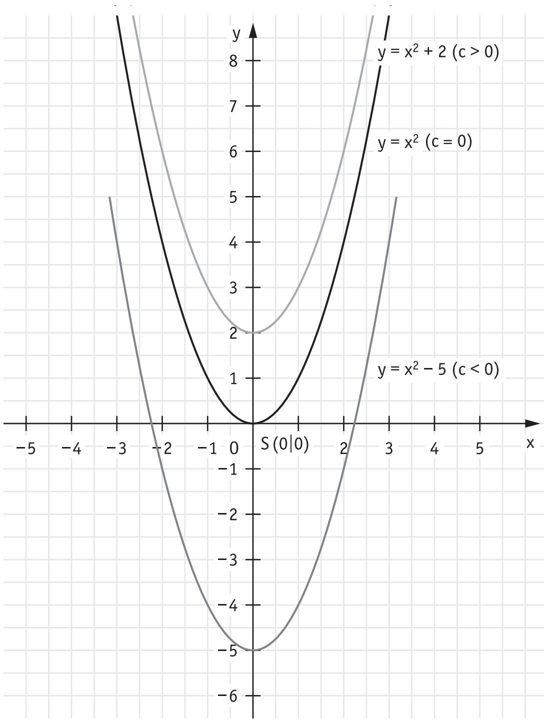
(a) Der Graph der Funktion mit $y = x^2 + c$ entsteht aus der Normalparabel und durch Verschiebung um c Einheiten in Richtung der y-Achse.

(b) Der Punkt $S(0/c)$ ist der *Scheitel* der Parabel.

(c) Die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse.

(d) Die Wertemenge der Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen mit $y \geq 0$.

(e) Die Funktion besitzt
- zwei Nullstellen, wenn $c < 0$
- eine Nullstelle wenn $c = 0$
- keine Nullstelle, wenn $c > 0$.



2.1.3.4 Eigenschaften der quadratischen Funktion mit $y = x^2 + bx + c$; $x \in \mathbb{R}$

(a) Die *Scheitelpunktform* der Funktionsgleichung lautet:
$y = (x - d)^2 + e$
Das heißt: Der Graph der quadratischen Funktion entsteht aus der Normalparabel durch Verschieben von d Einheiten in Richtung der x-Achse und um e Einheiten in Richtung der y-Achse.

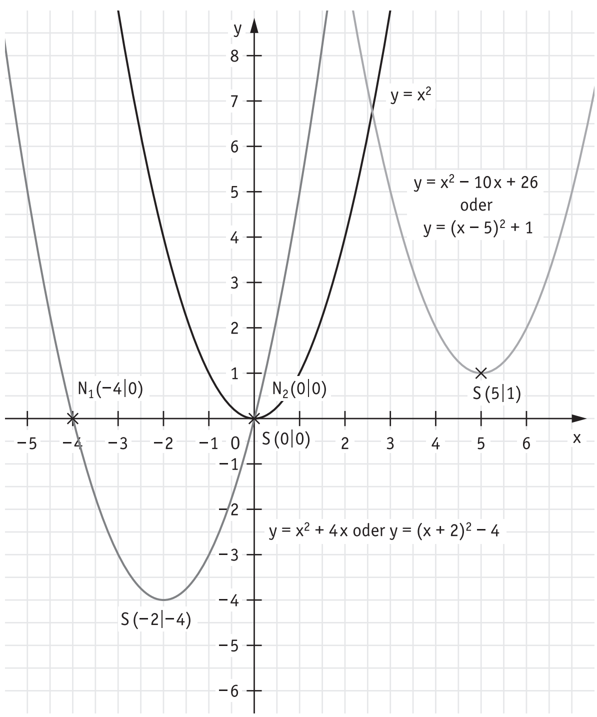
(b) Der Scheitel S hat dann die Koordinaten (d/e) mit $d = -\frac{b}{2}$ und $e = c \cdot \frac{b^2}{4}$.

(c) Die Parabel ist *symmetrisch* zu der Parallelen der y-Achse durch den Scheitel (d/e).

(d) Für alle $x \leq d$ ist die Parabel *streng monoton fallend*, für alle $x \geq d$ ist sie *streng monoton steigend*.

(e) Der Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen y mit $y \geq e$.

(f) Die quadratische Funktion hat
- zwei Nullstellen, wenn $e < 0$
- eine Nullstelle, wenn $e = 0$
- keine Nullstelle, wenn $e > 0$.



2.1.3.5 Lösen von gemischtquadratischen Gleichungen der Form $x^2 + bx + c = 0$

Um quadratische Gleichungen der Form $x^2 + bx + c = 0$
(oder auch: $x^2 + qx + p = 0$) zu lösen, stehen zwei Verfahren zur Auswahl:

Rechnerische Lösung durch quadratische Ergänzung:

Zuerst formt man die Gleichung so um, dass man den Term auf der linken Seite mithilfe einer binomischen Formel in ein Quadrat verwandeln kann.

$$
\begin{array}{lll}
x^2 - 8x - 9 & = 0 & / + 9 \\
x^2 - 8x & = 9 & / + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 \\
 & & \text{(Quadrat des halben Faktors von } x\text{)} \\
x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 & = 9 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 & \\
x^2 - 8x + 4^2 & = 9 + 4^2 & \\
x^2 - 8x + 16 & = 9 + 16 & /\text{(2. binomische Formel)} \\
(x-4)^2 & = 25 & / \sqrt{} \\
x - 4 & = \pm 5 & / + 4 \\
x_1 & = +5 + 4 & = 9 \\
x_2 & = -5 + 4 & = -1
\end{array}
$$

$\mathbb{L} = \{9; -1\}$ (Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse)

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Falls die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ Lösungen besitzt, erhält man:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel 1:

$2x^2 - 22x + 36 = 0$ $\quad / : 2$ $\quad$ (Die Gleichung muss zuerst in die Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht werden.)

$x^2 - 11x + 18 = 0$ $\quad p = -11$ $\quad q = 18$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

3 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

3.1 Vektoren

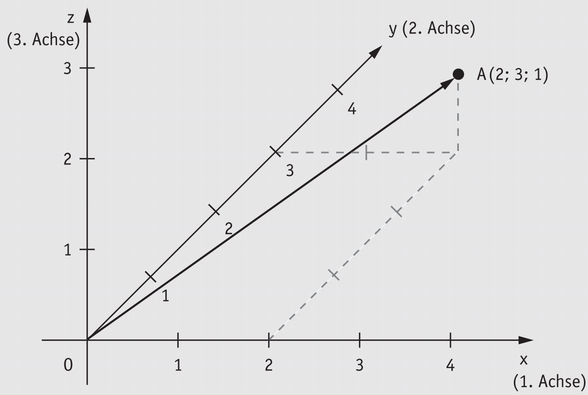
3.1.1 Vektoren im Raum

Ein Vektor mit drei Komponenten a_1, a_2 und a_3 ist ein in Spalten geschriebenes

Zahlentripel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{0A} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist **Ortsvektor** des Punkte $A(a_1; a_2; a_3)$.

Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird als **Nullvektor** bezeichnet.



Unter einem **Gegenvektor** eines Vektors $\vec{a}$ versteht man einen Vektor mit der gleichen Länge, aber mit entgegengesetzter Richtung. Man bezeichnet ihn mit $-\vec{a}$.

$-\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ ist der Gegenvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Beispiel: Man bestimme jeweils die Gegenvektoren zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2a \\ -1+a \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2a \\ -1+a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{b} = -\begin{pmatrix} -2a \\ -1+a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1-a \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Zwei Vektoren werden komponentenweise miteinander addiert oder subtrahiert.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Beispiele: Man berechne jeweils:

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Vervielfachen von Vektoren

Vektoren werden mit einer Zahl k vervielfacht, indem jede Komponente des Vektors mit der Zahl multipliziert wird.

$$k \cdot \overrightarrow{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$$ ***Vervielfachen eines Vektors***

Beispiele:

(1) Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; man berechne $5 \cdot \overrightarrow{a}$:

Lösung: $5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) Gegeben sind zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Man bestimme die Zahl k so, dass gilt:

$\overrightarrow{b} = k \cdot \overrightarrow{a}$

gegeben: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

Lösung:

$2 \cdot k = 6 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

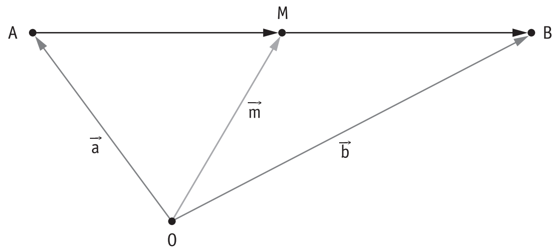
$-3 \cdot k = -9 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

$4 \cdot k = 12 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

Kein Widerspruch $\Rightarrow$ $k = 3$

3.1.4 *Mittelpunkt einer Strecke*

Gehören zu den Endpunkten *A* und *B* einer Strecke die Ortsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$, so hat der Mittelpunkt der Strecke *M* den Ortsvektor: $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$



Bei Zerlegung in eine beliebige Anzahl n gleich langer Teilstücke gilt für die Ortsvektoren der Teilpunkte $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$:

$$\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{a} + \frac{k}{n} \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

Beispiele:

(1) Die Endpunkte *A* und *B* einer Strecke haben die Ortsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Man berechne den Ortsvektor $\overrightarrow{m}$ des Streckenmittelpunktes *M*.

gegeben: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung: $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

(2) Von einer Strecke $\overline{AB}$ sind der Anfangspunkt *A* und der Mittelpunkt *M* und somit ihre Ortsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{m}$ gegeben. Bestimmt werden soll der Ortsvektor zum Punkt *B*.

gegeben: $A = (-2; 3; 1) \qquad \overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

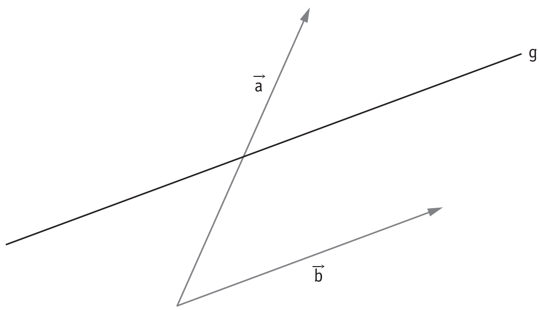
Lösung: Man erhält aus $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$

$$\overrightarrow{b} = 2 \cdot \overrightarrow{m} - \overrightarrow{a} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.1.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Man nennt zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ voneinander *linear abhängig*, falls wenigstens einer der Vektoren eine Linearkombination (Vielfaches) der übrigen Vektoren ist. Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn es keine Gerade gibt, zu der die Pfeile beider Vektoren parallel sind.



Voneinander linear unabhängige Vektoren

Beispiel: Man untersuche jeweils, ob die drei Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ voneinander linear abhängig sind.

(1) gegeben: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung: Zu lösen ist ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten (s. a. Kap. 3.3.2, S. 167)

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit:

$$\begin{array}{lrl}
\text{I.} & r_1 + 3r_2 + 2r_3 = 0 & /\cdot(-2) \\
\text{II.} & -r_1 + \phantom{3r_2 +{}} 2r_3 = 0 & \\
\text{III.} & \underline{2r_1 + r_2 - r_3 = 0} & \\
\text{IV.} & 3r_2 + 4r_3 = 0 & /\cdot 5 \\
\text{V.} & \underline{-5r_2 - 5r_3 = 0} & /\cdot (3) \\
 & 5r_3 = 0 &
\end{array}$$

Es ergibt sich also die Lösung $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Dies bedeutet, dass die drei Vektoren voneinander linear unabhängig sind.

(2) gegeben: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Lösung: Wiederum muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit:

$$\begin{array}{llll}
\text{I.} & r + 4s + 2t = 0 & /\cdot(-2) \;\oplus & /\cdot 3 \;\oplus \\
\text{II.} & 2r - 4t = 0 & & \\
\text{III.} & \underline{-3r + s + 7t = 0} & & \\
\text{IV.} & -8s - 8t = 0 & /\cdot 13 \;\oplus & \\
\text{V.} & \underline{13s + 13t = 0} & /\cdot (8) & \\
 & 0 = 0 & &
\end{array}$$

Setzt man $t = 1$, erhält man durch Einsetzen in Gleichung V: $s = -1$ und durch Einsetzen in Gleichung I: $r = 2$.

$(2; -1; 1)$ ist eine von $(0; 0; 0)$ verschiedene Lösung, somit sind die Vektoren voneinander linear abhängig.

3.1.6 Betrag eines Vektors

Der Betrag $\left|\overrightarrow{a}\right|$ eines Vektors $\overrightarrow{a}$ mit $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$ ist der Abstand der Punkte P und Q voneinander.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \quad \textbf{\textit{Betrag eines Vektors}}$$

Für $P = (p_1; p_2; p_3)$ und $Q = (q_1; q_2; q_3)$ gilt:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Beispiel: Man bestimme die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

gegeben: $A = (2; 4; 7)$; $B = (3; -1; 1)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{(3-2)^2 + ((-1)-4)^2 + (1-7)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{62} \approx 7{,}87 \end{aligned}$$

3.2 Skalarprodukt von Vektoren

3.2.1 Das Skalarprodukt

Für zwei Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ wird die Zahl

$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ als das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ bezeichnet.

Man schreibt: $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Beispiele: Zu berechnen sei das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.

(1) gegeben: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 = 2 - 8 - 4 = -10 \end{aligned}$$

(2) gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -a \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung: $\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -a \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= 3 \cdot (-a) + 2a \cdot 4 + (-a) \cdot (-3) = -3a + 8a + 3a = 8a$

(3) Man bestimme im Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$ das x so, dass gilt: $\vec{a} * \vec{b} = 0$

gegeben: $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: $\vec{a} * \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

$2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + x \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{4}$

Somit lautet der gesuchte Vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

3.2.2 Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und alle reellen Zahlen r und s gilt:

(a)	$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$	***Kommutativgesetz***
(b)	$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$	***Distributivgesetz***
	$\vec{a} * (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} - \vec{a} * \vec{c}$	
(c)	$(r \cdot \vec{a}) * (s \cdot \vec{b}) = r \cdot s \cdot (\vec{a} * \vec{b})$	***wichtig:*** $*$-Rechnung vor Strichrechnung

Beispiele: Jeweils zu berechnen sei:

(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung: $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= [4 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 5] + [4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1)]$$
$$= 9 + 3 = 12$$

(2) $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right]$

Lösung: $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ -4{,}4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$

$$= (-5) \cdot 2{,}2 + 3 \cdot (-4{,}4) + 6 \cdot 5{,}5 = 8{,}8$$

3.2.3 Winkel zwischen zwei Vektoren

Für je zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (verschieden vom Nullvektor) und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α gilt:

Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Beispiele: Man berechne jeweils den Winkel α zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}$

$$= \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{35}} \approx 0{,}157$$

$\alpha \approx 81^\circ$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$

$$= \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} = 0$$

$\alpha = 90^\circ$ Die Geraden stehen senkrecht aufeinander.

3.2.4 Orthogonale und parallele Vektoren

Für zwei Vektoren $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{b} \neq 0$ gilt:

$\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind genau dann *orthogonal* (senkrecht) zueinander, wenn gilt:

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = 0$

$\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind genau dann *parallel* zueinander, wenn gilt:

$\overrightarrow{a} = r \cdot \overrightarrow{b} \quad (r \neq 0)$

Beispiele:

(1) Es sei zu überprüfen, ob die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ orthogonal oder parallel zueinander sind.

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ -3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung: $\overrightarrow{a} = r \cdot \overrightarrow{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ -3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = 3{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit sind $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ parallel zueinander.

(2) Man bestimme x so, dass die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ orthogonal zueinander sind.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$2x - 2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -10 \Rightarrow x = -5$

Für $x = -5$ sind die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ orthogonal zueinander.

3.3 Lineare Gleichungssysteme

Eine Gleichung der Form $2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 12$ heißt *linear*, wenn die Variablen x_1, x_2, x_3 nur in der ersten Potenz auftreten. Die Zahlen 2, 7 und -3 heißen Koeffizienten der Gleichung.
Ein lineares Gleichungssystem besteht aus mehreren solchen Gleichungen.

3.3.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen gibt es drei Lösungsverfahren: das *Einsetzungsverfahren*, das *Gleichsetzungsverfahren* und das *Additionsverfahren*.
Die häufigste Anwendung findet das Additionsverfahren, da dieses auch bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen seine Anwendung findet (Gauß-Algorithmus).

3.3.1.1 Das Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren wird eine der beiden Gleichungen nach der Variablen x oder der Variablen y umgeformt. Der Term für die umgeformte Variable wird dann in die andere Gleichung eingesetzt und diese Gleichung gelöst. So erhält man den Wert der ersten Variablen. Dieser Wert wird nun anstelle dieser Variablen in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen eingesetzt und man erhält nach Lösen dieser Gleichung den Wert der zweiten Variablen.
Die Anwendung des Einsetzungsverfahrens ist günstig, wenn eine Gleichung schon nach einer Variablen umgeformt ist.

Stichwortverzeichnis