

# 1 Grundlagen

## 1.1 Maßeinheiten und ihre Umwandlungen

### Längen

$$1 \text{ km} \xrightarrow{:1000} 1 \text{ m} \xrightarrow{:10} 1 \text{ dm} \xrightarrow{:10} 1 \text{ cm} \xrightarrow{:10} 1 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} \\ 1 \text{ m} &= 10 \text{ dm} \\ 1 \text{ dm} &= 10 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} &= 10 \text{ mm} \end{aligned}$$

### Flächeninhalte

$$1 \text{ km}^2 \xrightarrow{:100} 1 \text{ ha} \xrightarrow{:100} 1 \text{ a} \xrightarrow{:100} 1 \text{ m}^2 \xrightarrow{:100} 1 \text{ dm}^2 \xrightarrow{:100} 1 \text{ cm}^2 \xrightarrow{:100} 1 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ km}^2 &= 100 \text{ ha} & 1 \text{ m}^2 &= 100 \text{ dm}^2 \\ 1 \text{ ha} &= 100 \text{ a} & 1 \text{ dm}^2 &= 100 \text{ cm}^2 \\ 1 \text{ a} &= 100 \text{ m}^2 & 1 \text{ cm}^2 &= 100 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Die Umwandlungszahl ist 100.

### Rauminhalte (Volumina)

$$1 \text{ m}^3 \xrightarrow{:1000} 1 \text{ dm}^3 \xrightarrow{:1000} 1 \text{ cm}^3 \xrightarrow{:1000} 1 \text{ mm}^3$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ dm}^3 & 1 \text{ cm}^3 &= 1 \text{ ml} \\ 1 \text{ dm}^3 &= 1000 \text{ cm}^3 & 1 \text{ dm}^3 &= 1 \text{ l} \\ 1 \text{ cm}^3 &= 1000 \text{ mm}^3 & 1 \text{ l} &= 1000 \text{ ml} \end{aligned}$$

Die Umwandlungszahl ist 1000.

### Gewichte (Massen)

$$1 \text{ t} \xrightarrow{:1000} 1 \text{ kg} \xrightarrow{:1000} 1 \text{ g} \xrightarrow{:1000} 1 \text{ mg}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ t} &= 1000 \text{ kg} \\ 1 \text{ kg} &= 1000 \text{ g} \\ 1 \text{ g} &= 1000 \text{ mg} \end{aligned}$$

Die Umwandlungszahl ist 1000.

## Zeitspannen

$$1 \text{ d} = 24 \text{ h}; \quad 1 \text{ h} = 60 \text{ min}; \quad 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

(d bedeutet Tag, h bedeutet Stunde)

## 1.2 Bruchzahlen

### Gewöhnliche Brüche

Gewöhnliche Brüche sind z. B.:  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{8}; \frac{5}{8}$  usw.

Die Zahl über dem Bruchstrich heißt Zähler, die Zahl unter dem Bruchstrich ist der Nenner. Der Nenner des Bruches gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird. Der Zähler gibt an, wie viele solche Teile davon vorhanden sind.

### Gemischte Schreibweise

$$2\frac{3}{4} \text{ bedeutet } 2 + \frac{3}{4}$$

**Beispiele:**  $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$$\frac{13}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$$

### Kürzen und Erweitern

Man kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner durch dieselbe natürliche Zahl dividiert.

**Beispiel:**  $\frac{3}{27} = \frac{3:3}{27:3} = \frac{1}{9}$

Man erweitert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.

**Beispiel:**  $\frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{4}{36}$

### Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Man addiert (subtrahiert) gleichnamige (gleiche Nenner) Brüche, indem man die Zähler addiert (subtrahiert). Der Nenner bleibt unverändert. Ungleichnamige Brüche (unterschiedliche Nenner) müssen zuerst gleichnamig gemacht werden.

**Beispiele:**  $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

### Multiplizieren von Brüchen

Man multipliziert Brüche, indem man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziert.

**Beispiel:**  $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

### Dividieren von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

**Beispiel:**  $\frac{3}{8} : \frac{2}{3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{16}$

## 1.3 Dreisatzrechnung

Bei der Dreisatzrechnung muss zwischen proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen unterschieden werden.

### Proportionale Zuordnungen

Für proportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen, etc.) einer Größe gehört das Doppelte (Dreifache etc.) der zugeordneten Größe.

Zur Hälfte (zum dritten Teil etc.) gehört die Hälfte (der dritte Teil, etc.) der zugeordneten Größe.

**Beispiel:** Für Spaghetti Bolognese für vier Personen benötigt man 480 g Spaghetti. Wie viel g Spaghetti benötigt man für 7 Personen?

Personen	Spaghetti
4	480 g
1	120 g
7	840 g

$:4$

$:4$

$\cdot 7$

$\cdot 7$

**Ergebnis:** Für 7 Personen benötigt man 840 g Spaghetti.

*Noch einfacher ist dieser Rechenweg zu praktizieren:*

4 Personen  $\Leftrightarrow$  480 g Spaghetti

7 Personen  $\Leftrightarrow$  x g Spaghetti

$$x = \frac{7 \text{ Personen} \cdot 480 \text{ g}}{4 \text{ Personen}}$$

$$x = 840 \text{ g}$$

### Antiproportionale Zuordnungen

Für antiproportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen, etc.) einer Größe gehört die Hälfte (der dritte Teil, etc.) der zugeordneten Größe  
Zur Hälfte (zum dritten Teil, etc.) einer Größe gehört das Doppelte (das Dreifache, etc.) der zugeordneten Größe.

**Beispiel:** Für eine Studienfahrt erhält ein Kurs einen Fahrtkostenzuschuss.  
Wenn alle 30 Teilnehmer mitfahren, erhält jeder 15,— Euro.  
Es fahren aber nur 25 Teilnehmer mit. Wie hoch ist nun der Zuschuss für jeden Kursteilnehmer?

Teilnehmer	Zuschuss
30	15,— €
5	90,— €
25	18,— €

$\begin{matrix} \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ :6 & & \cdot 6 \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ \cdot 5 & & :5 \end{matrix}$

**Antwort:** Jeder Kursteilnehmer erhält einen Zuschuss von 18,— Euro.

*Noch einfacher geht es mit diesem Rechenweg:*

30 Teilnehmer  $\Leftrightarrow$  15,— €

25 Teilnehmer  $\Leftrightarrow$  x €

$$x = \frac{30 \text{ Teilnehmer} \cdot 15,— €}{25 \text{ Teilnehmer}}$$

$$x = 18,— €$$

## 1.4 Binomische Formeln

Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert.

### 1. Binomische Formel:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Beispiele:** (1)  $(2x + 7)^2 = (2x + 7) \cdot (2x + 7) = 4x^2 + 14x + 14x + 49$   
 $= 4x^2 + 28x + 49$

(2)  $(3xy + 5)^2 = (3xy + 5) \cdot (3xy + 5)$   
 $= 9x^2y^2 + 15xy + 15xy + 25 = 9x^2y^2 + 30xy + 25$

### 2. Binomische Formel:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Beispiele:** (1)  $(5y - z)^2 = (5y - z) \cdot (5y - z) = 25y^2 - 5yz - 5yz + z^2$   
 $= 25y^2 - 10yz + z^2$

(2)  $(8x - 8y)^2 = (8x - 8y) \cdot (8x - 8y)$   
 $= 64x^2 - 64xy - 64xy + 64y^2$   
 $= 64x^2 - 128xy + 64y^2$

### 3. Binomische Formel:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

**Beispiele:** (1)  $(y + 3x) \cdot (y - 3x) = y^2 - 3xy + 3xy - 9x^2 = y^2 - 9x^2$

(2)  $(4x + 12) \cdot (4x - 12) = 16x^2 - 48x + 48x - 144$   
 $= 16x^2 - 144$

## 1.5 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras)

### 1.5.1 Der Satz des Pythagoras

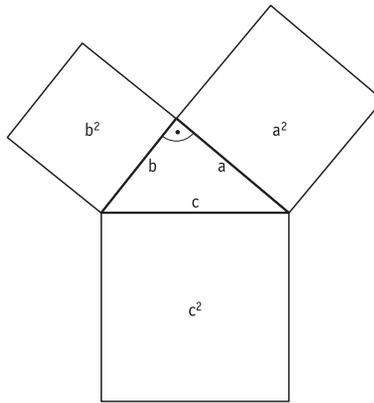
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$a$ : Länge der einen Kathete

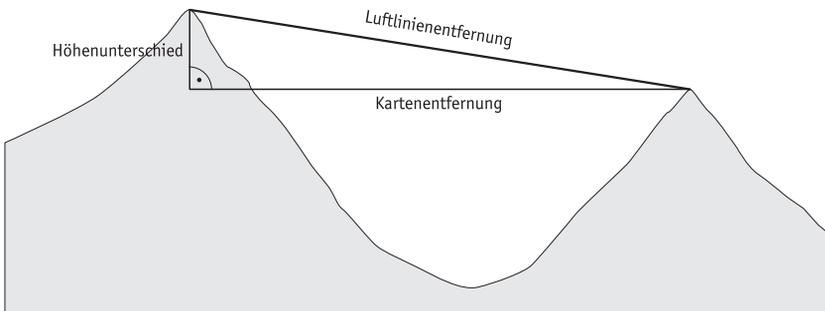
$b$ : Länge der anderen Kathete

$c$ : Länge der Hypotenuse



Die beiden Katheten schließen den rechten Winkel ein, die Hypotenuse liegt diesem gegenüber.

**Beispiel 1:** Es soll die Luftlinienentfernung zwischen den Gipfeln des Großglockners (3797 m) und des Hahlberges (2634 m) bestimmt werden. Aus der Landkarte kann eine Entfernung von 7,6 km abgelesen werden.



**Rechnung:** Der Höhenunterschied der beiden Gipfel beträgt 1163 m. Gemeinsam mit der Entfernung von 7600 m kann nun über den Pythagoras die Luftlinienentfernung bestimmt werden.

$$(1163 \text{ m})^2 + (7600 \text{ m})^2 = x^2$$

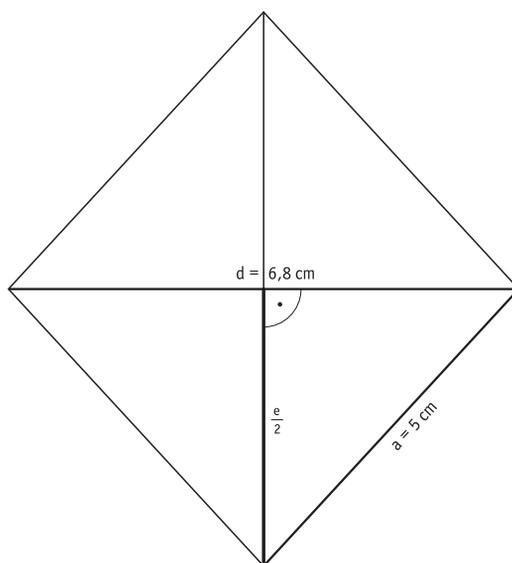
$$1.352.569 \text{ m}^2 + 57.760.000 \text{ m}^2 = x^2$$

$$59.112.569 \text{ m}^2 = x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$7.688,47 \text{ m} = x$$

Die Luftlinienentfernung der beiden Gipfel voneinander beträgt somit 7,68847 km.

**Beispiel 2:** In einer Raute mit einer Seitenlänge von 5 cm ist eine Diagonale 6,8 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat die Raute?



**Rechnung:** Zuerst muss die Länge der anderen Diagonale bestimmt werden.

Gegeben:  $a = 5 \text{ cm}$

$$d = 6,8 \text{ cm}; \frac{d}{2} = 3,4 \text{ cm}$$

$$(3,4 \text{ cm})^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (5 \text{ cm})^2$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = (5 \text{ cm})^2 - (3,4 \text{ cm})^2$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = 13,44 \text{ cm}^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\frac{e}{2} = 3,67 \text{ cm} \quad / \cdot 2$$

$$e = 7,34 \text{ cm}$$

Der Flächeninhalt der Raute ergibt sich nun aus dem Produkt der Länge der einen Diagonalen multipliziert mit der Hälfte der Länge der anderen Diagonalen.

$$A = d \cdot \frac{e}{2}$$

$$A = 6,8 \text{ cm} \cdot 3,67 \text{ cm} = 24,96 \text{ cm}^2$$

Die Raute hat einen Flächeninhalt von  $24,96 \text{ cm}^2$ .

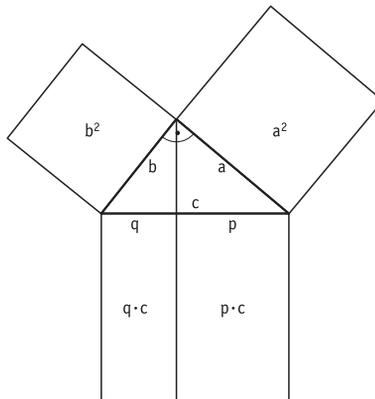
### 1.5.2 Der Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt eines Kathetenquadrates genauso groß wie der der Flächeninhalt des Rechteckes aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt.

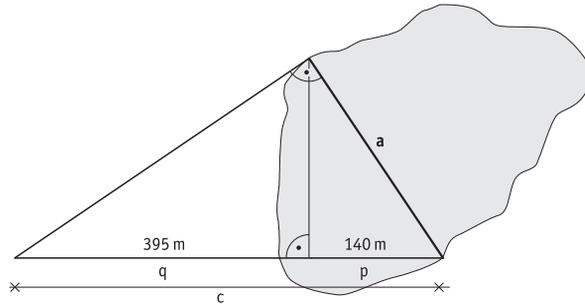
$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

$p, q$ : Länge der Hypotenusenabschnitte



**Beispiel:** Zu bestimmen ist die Entfernung von dem einen Seeufer zum anderen.



**Rechnung:** Gegeben:  $c = p + q = 535 \text{ m}$   
 $p = 140 \text{ m}$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$a^2 = 535 \text{ m} \cdot 140 \text{ m}$$

$$a^2 = 74.900 \text{ m}^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$a = 273,68 \text{ m}$$

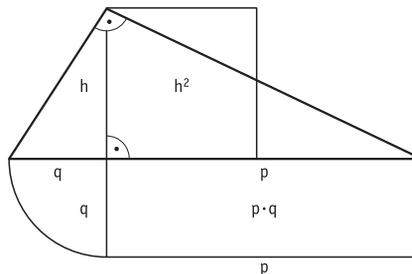
Die Entfernung der beiden Seeufer von einander beträgt 273,68 m.

### 1.5.3 Der Höhensatz

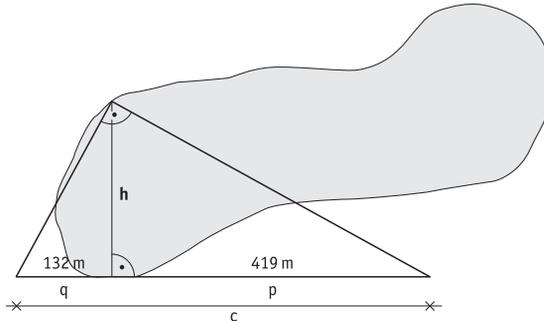
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$$h^2 = p \cdot q$$

$h$ : Dreieckshöhe



**Beispiel:** Es soll die Entfernung von einem Seeufer zum anderen bestimmt werden.



**Rechnung:** Gegeben:  $p = 419\text{ m}$        $q = 132\text{ m}$        $c = p + q = 551\text{ m}$

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h^2 = 419\text{ m} \cdot 132\text{ m}$$

$$h^2 = 55.308\text{ m}^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$h = 235,18\text{ m}$$

Die beiden Seeufer sind 235,18 m von einander entfernt.

## 1.6 Trigonometrie

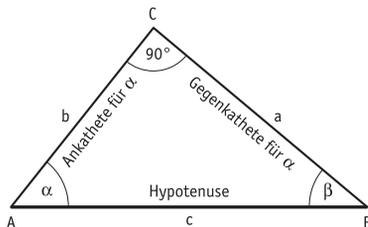
### 1.6.1 Sinus, Kosinus, Tangens für den Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

Für spitze Winkel (im rechtwinkligen Dreieck) gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$



Für den Punkt  $P_\alpha(x; y)$  auf dem Einheitskreis gilt:

$$\sin \alpha = y; \quad \cos \alpha = x$$

**Für  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  gilt:**

$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$$

**Für  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  gilt:**

$$\sin \alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$$

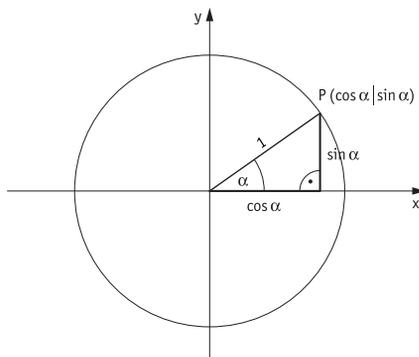
$$\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$\tan \alpha = -\tan(360^\circ - \alpha)$$

### Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



### 1.6.2 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Aus zwei Seiten oder aus einer Seite und einem Winkel lassen sich die übrigen Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen.

Weil man jedes beliebige Dreieck mithilfe von Höhen in rechtwinklige Dreiecke zerlegen oder zu solchen ergänzen kann, können damit auch nicht-rechtwinklige Dreiecke berechnet werden und somit auch n-Ecke, die wiederum aus Teildreiecken bestehen.

## 2 Analysis

### 2.1 Funktionen

#### 2.1.1 Definition von Funktionen

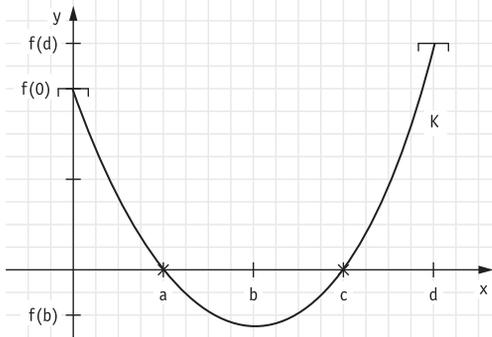
Eine Zuordnung  $f$ , die jedem  $a \in D$  mit  $\subseteq \mathbb{R}$  genau einen Wert  $f(a) \in \mathbb{R}$  zuweist, heißt *reelle Funktion*. Wir nennen  $f(a)$  den *Funktionswert von  $f$  an der Stelle  $a$* .

Ist  $f(a) = 0$ , so ist  $a$  eine *Nullstelle* von  $f$ . In der Regel wird  $f$  durch den Funktionsterm  $f(x)$  gegeben.

Das Schaubild  $K$  von  $f$  hat die Gleichung:  $y = f(x)$ .

$D$  heißt *Definitionsbereich*, die Menge  $W$  aller Funktionswerte *Wertebereich* der Funktion  $f$ .

Die größtmögliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , für die der Funktionsterm definiert ist, heißt *maximaler Definitionsbereich*.



$$D = [0; d]$$

$$W = [f(b); f(d)]$$

$$\text{Nullstellen: } a; c$$

#### 2.1.2 Lineare Funktionen

Eine Funktion vom Typ  $f$  mit  $f(x) = mx + b$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ( $m, b \in \mathbb{R}$ ) ist eine *lineare Funktion*.

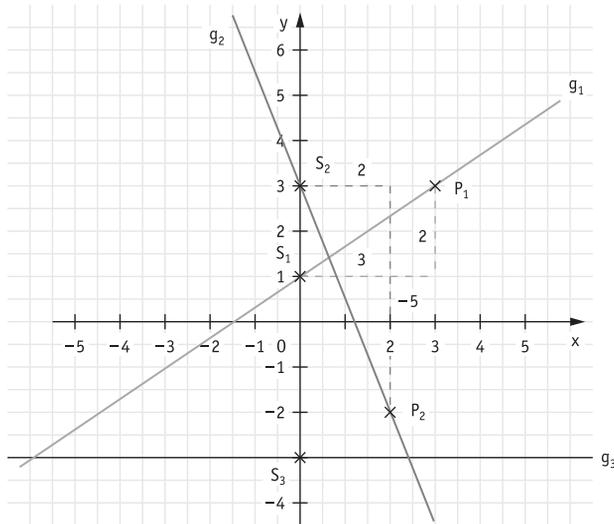
Ihr Schaubild mit der Gleichung  $y = mx + b$  heißt *Gerade*. Hierbei ist  $m$  die Steigung der Geraden und  $b$  der Schnittpunkt mit dem *y-Achse* (*y*-Achsenabschnitt).

#### Beispiele zum Zeichnen von Geraden:

$$(1) \quad g_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$$

$$(2) \quad g_2 : y = -\frac{5}{2}x + 3$$

(3)  $g_3 : y = -3$



- Zu (1) Da  $b = 1$  ist, liegt der Schnittpunkt mit der y-Achse  $S_1$   $(0/1)$  auf der Geraden  $g_1$ . Mit der Steigung  $m = \frac{2}{3}$  geht man von  $S_1$  aus 3 Einheiten nach rechts (positive x-Richtung) und 2 Einheiten nach oben (positive y-Richtung), um einen weiteren Punkt der Geraden zu erhalten. Kurz: Nenner der Steigung in x-Richtung, Zähler in y-Richtung. So erhält man den 2. Punkt  $P_1$   $(3/3)$  zum Zeichnen der Geraden.
- Zu (2) Aus  $b = 3$  folgt  $S_2$   $(0/3) \in g_2$ . Da die Steigung  $m = -\frac{5}{2}$  ein negatives Vorzeichen hat, geht man dieses Mal 2 Einheiten in positive x-Richtung und 5 Einheiten in negative y-Richtung, also nach unten und erhält so  $P_2$   $(2/-2)$ .
- Zu (3) Aus  $b = -3$  folgt  $S_3$   $(0/-3) \in g_3$ . Da hier die Steigung  $m = 0$  ist, verläuft  $g_3$  parallel zur x-Achse.

**Zu beachten:**

Für lineare Funktionen gilt:  $f(x + 1) = m(x + 1) + b = mx + m + b = f(x) + m$ . Das bedeutet, bei Vergrößerung (Verkleinerung) eines beliebigen x-Wertes um 1 wird der zugehörige y-Wert um die Steigung  $m$  größer (kleiner). Mit dieser Eigenschaft kann man von einem beliebigen Punkt der Geraden ausgehend weitere Punkte erhalten.

### Geradengleichungen

$P(x/y)$  ist ein beliebiger Punkt einer Geraden

**Hauptform:**  $g: y = mx + b$

$m$  ist die Steigung und  $b$  der y-Achsenabschnitt der Geraden.

**Punktsteigungsform:**  $g: \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

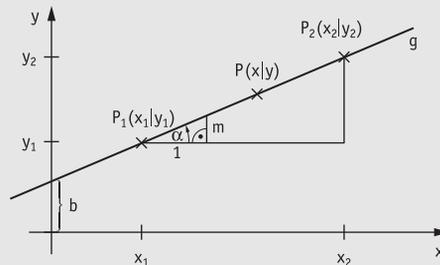
$m$  ist die Steigung und  $P_1(x_1/y_1)$  ein gegebener Punkt der Geraden.

**Zweipunkteform:**  $g: \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$P_1(x_1/y_1)$  und  $P_2(x_2/y_2)$  sind zwei gegebene Punkte der Geraden mit  $x_1 \neq x_2$ .

### Allgemeine

**Geradengleichung:**  $g: ax + by + c = 0; \quad a, b \in \mathbb{R},$   
wobei  $a \neq 0 \vee b \neq 0$



Zwischen dem Steigungswinkel der Weite  $\alpha (-90^\circ < \alpha < 90^\circ)$  und der Steigung  $m$  besteht die Beziehung:  $\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

### Beispiele zum Bestimmen von Geradengleichungen:

(1) gegeben:  $P(4/3); m = \frac{1}{2}$

Punktsteigungsform  $\frac{y - 3}{x - 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{2} \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{2}x - 2$

$g: y = \frac{1}{2}x + 1$

(2) gegeben:

$$P_1(-4/-2); P_2(4/4,5)$$

$$\text{Zweipunkteform} \quad \frac{y - (-2)}{x - (-4)} = \frac{4,5 - (-2)}{4 - (-4)} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{x + 4} = \frac{6,5}{8}$$

$$\frac{y + 2}{x + 4} = \frac{13}{16} \Leftrightarrow y + 2 = \frac{13}{16} \cdot (x + 4)$$

$$g : y = \frac{13}{16}x - \frac{5}{4}$$

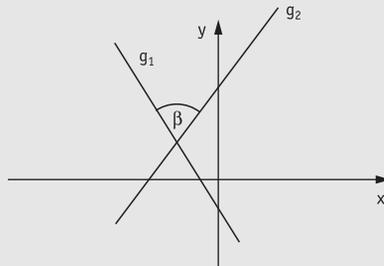
### Schnittwinkel von Geraden, Orthogonalität, Parallelität

Zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  bilden einen Schnittwinkel der Weite  $\beta$  ( $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ).

$$\text{Dabei gilt:} \quad \tan \beta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad \text{wenn } m_1 \cdot m_2 \neq -1$$

$$\text{Die Geraden sind orthogonal } (\beta = 90^\circ) \quad \text{wenn } m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\text{Die Geraden sind parallel } (\beta = 0^\circ) \quad \text{wenn } m_1 = m_2$$



**Beispiel:** Welche der nachfolgenden Geraden sind zueinander orthogonal (parallel)?

$$g_1: y = -5x + 1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -5$$

$$g_2: y = 0,2x + 3 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 0,2 = \frac{1}{5}$$

$$g_3: y = 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad m_3 = 4$$

$$g_4: y = -5x - 7 \quad \Rightarrow \quad m_4 = -5$$

$$m_1 \cdot m_2 = -5 \cdot \frac{1}{5} = -1 \quad \Rightarrow \quad g_1 \perp g_2$$

$$m_1 \cdot m_3 = -5 \cdot 4 = -20 \quad \Rightarrow \quad g_1 \text{ weder } \perp \text{ noch } \parallel g_3$$

$$m_1 = m_4 \quad \Rightarrow \quad g_1 \parallel g_4$$

$$\begin{aligned}
 m_2 \cdot m_3 &= \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5} & \Rightarrow & \quad g_2 \text{ weder } \perp \text{ noch } \parallel g_3 \\
 m_2 \cdot m_4 &= -5 \cdot \frac{1}{5} = -1 & \Rightarrow & \quad g_2 \perp g_4 \\
 m_3 \cdot m_4 &= 4 \cdot -5 = -20 & \Rightarrow & \quad g_3 \text{ weder } \perp \text{ noch } \parallel g_4
 \end{aligned}$$

### Länge und Mittelpunkt einer Strecke

Gegeben sind die Punkte  $P_1 (x_1/y_1)$  und  $P_2 (x_2/y_2)$ .

Für die Länge der Strecke  $\overline{P_1P_2}$  gilt  $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{P_1P_2}$  ist  $M \left( \frac{x_1 + x_2}{2} / \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

### Beispiele:

(1) Wie lang ist die Strecke  $\overline{AB}$ ?

Gegeben:  $A(4/-7); \quad B(-4/8)$

$$\begin{aligned}
 |\overline{AB}| &= \sqrt{(-4 - 4)^2 + (8 - (-7))^2} = \sqrt{64 + 225} \\
 &= \sqrt{289} = 17LE \quad (\text{Längeneinheiten})
 \end{aligned}$$

(2) Wo liegt der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{RS}$ ?

Gegeben:  $R(3/-2) \quad S(5/6)$

$$x_m = \frac{3+5}{2} = 4 \quad y_m = \frac{(-2)+6}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad M(4/2)$$

#### 2.1.2.1 Beispiele zum Lösen linearer Gleichungen

$$(1) \quad 5x - 4 = 2(x - 3) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 4 = 2x - 6 + 1$$

$$5x - 4 = 2x - 5 \quad / + 4; -2x$$

$$3x = -1 \quad / : 3$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \mathbb{L} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

$$(2) \quad 3(2x + 1) = 6x \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 3 = 6x \quad / -6x$$

$$3 = 0 \quad \mathbb{L} = \{ \}$$

$$(3) \quad 2(x + 1) - x = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 - x = x + 2$$

$$x + 2 = x + 2 \quad / -x; -2$$

$$0 = 0 \quad \mathbb{L} = \mathbb{R}$$

### 2.1.3 Quadratische Funktionen

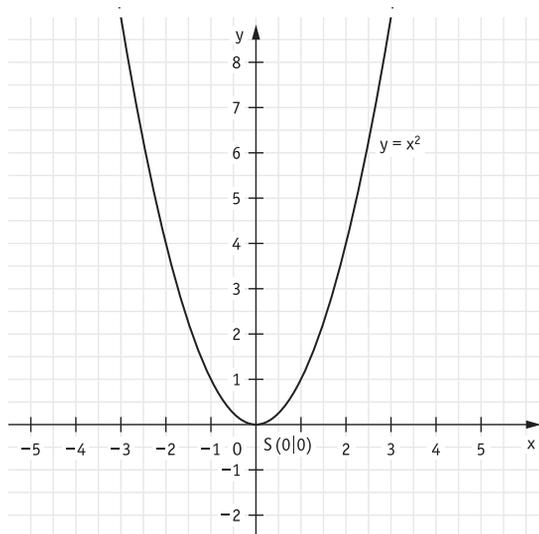
Eine Funktion des Typs  $f$  mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) heißt *quadratische Funktion*.

Ihr Schaubild mit der Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  ist eine *quadratische Parabel 2. Ordnung*.

Sie besitzt den Scheitelpunkt  $S\left(-\frac{b}{2a}/c - \frac{b^2}{4a}\right)$  und ist für  $a > 0$  ( $a < 0$ ) nach oben (unten) geöffnet. Für  $|a| = 1$  kann man die Parabel mithilfe einer Parabelschablone zeichnen.

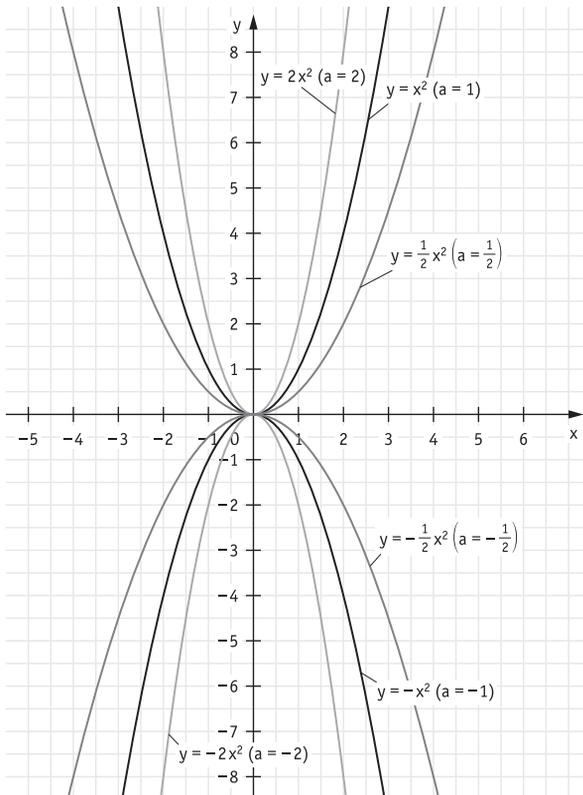
#### 2.1.3.1 Eigenschaften der quadratischen Funktion $y = x^2$ ; $x \in \mathbb{R}$ (Normalparabel)

- (a) Der Punkt  $S(0/0)$  ist der *Scheitel* der Parabel; er fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen.
- (b) Die Normalparabel ist *symmetrisch* zur y-Achse.
- (c) Für alle  $x$  mit  $x \leq 0$  ist die Funktion *streng monoton fallend*.  
Für alle  $x$  mit  $x \geq 0$  ist die Funktion *streng monoton steigend*.  
Der Scheitel ist der tiefste Punkt der Normalparabel.
- (d) Der Wertebereich der Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen  $y$  mit  $y \geq 0$ .
- (e)  $x_0 = 0$  ist die einzige Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse) der Funktion.



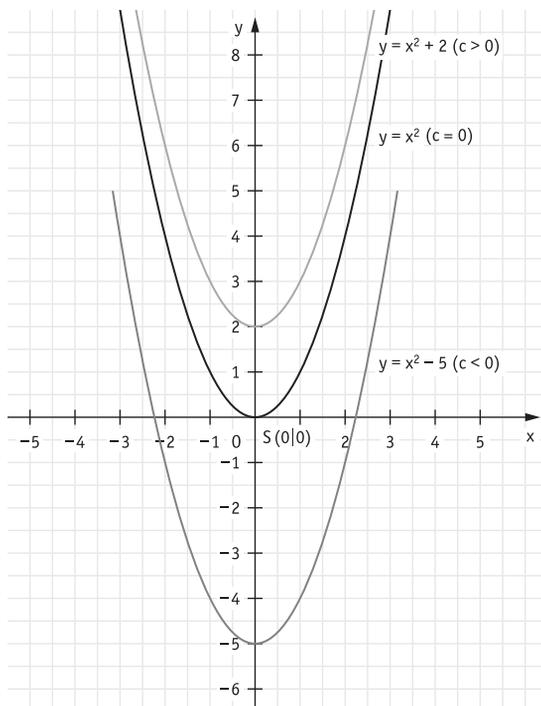
### 2.1.3.2 Eigenschaften der quadratischen Funktion mit $y = ax^2$ ; $x \in \mathbb{R}$

- (a) Der Graph der Funktion  $y = ax^2$  entsteht aus der Normalparabel
- durch Stauchung mit dem Faktor  $a$  in Richtung der  $y$ -Achse mit  $0 < a < 1$
  - durch Streckung mit dem Faktor  $a$  in Richtung der  $y$ -Achse mit  $a > 1$
  - durch Spiegelung an der  $x$ -Achse und Stauchung (Streckung) an der  $y$ -Achse mit  $a < 0$ .
- (b) Der Punkt  $S(0/0)$  ist der *Scheitel* der Parabel.
- (c) Die Parabel ist *symmetrisch* zur  $y$ -Achse.
- (d) Die Parabel ist nach unten geöffnet, wenn  $a < 0$ .
- (e) Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn  $a > 0$ .
- (f) Die Wertemenge der Funktion ist die Menge aller  $y$  mit  $y \geq 0$ , wenn  $a > 0$  oder  $y \leq 0$ , wenn  $a < 0$ .
- (g)  $x_0 = 0$  ist einzige Nullstelle der Funktion.



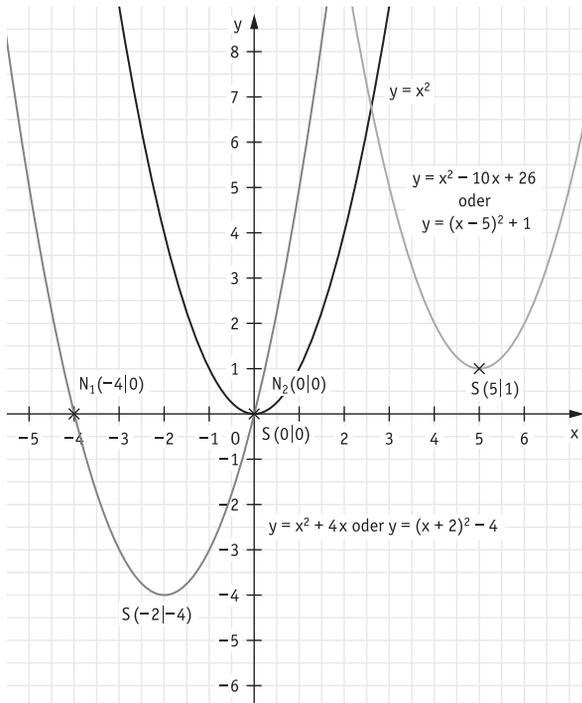
**2.1.3.3 Eigenschaften der quadratischen Funktion mit  $y = x^2 + c$ ;  $x \in \mathbb{R}$** 

- (a) Der Graph der Funktion mit  $y = x^2 + c$  entsteht aus der Normalparabel und durch Verschiebung um  $c$  Einheiten in Richtung der  $y$ -Achse.
- (b) Der Punkt  $S(0/c)$  ist der *Scheitel* der Parabel.
- (c) Die Parabel ist symmetrisch zur  $y$ -Achse.
- (d) Die Wertemenge der Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen mit  $y \geq 0$ .
- (e) Die Funktion besitzt
- zwei Nullstellen, wenn  $c < 0$
  - eine Nullstelle wenn  $c = 0$
  - keine Nullstelle, wenn  $c > 0$ .



### 2.1.3.4 Eigenschaften der quadratischen Funktion mit $y = x^2 + bx + c$ ; $x \in \mathbb{R}$

- (a) Die *Scheitelpunktform* der Funktionsgleichung lautet:  
 $y = (x - d)^2 + e$   
 Das heißt: Der Graph der quadratischen Funktion entsteht aus der Normalparabel durch Verschieben von  $d$  Einheiten in Richtung der  $x$ -Achse und um  $e$  Einheiten in Richtung der  $y$ -Achse.
- (b) Der Scheitel  $S$  hat dann die Koordinaten  $(d/e)$  mit  $d = -\frac{b}{2}$  und  $e = c - \frac{b^2}{4}$ .
- (c) Die Parabel ist *symmetrisch* zu der Parallelen der  $y$ -Achse durch den Scheitel  $(d/e)$ .
- (d) Für alle  $x \leq d$  ist die Parabel *streng monoton fallend*, für alle  $x \geq d$  ist sie *streng monoton steigend*.
- (e) Der Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen  $y$  mit  $y \geq e$ .
- (f) Die quadratische Funktion hat
- zwei Nullstellen, wenn  $e < 0$
  - eine Nullstelle, wenn  $e = 0$
  - keine Nullstelle, wenn  $e > 0$ .



### 2.1.3.5 Lösen von gemischtquadratischen Gleichungen der Form $x^2 + bx + c = 0$

Um quadratische Gleichungen der Form  $x^2 + bx + c = 0$  (oder auch:  $x^2 + qx + p = 0$ ) zu lösen, stehen zwei Verfahren zur Auswahl:

#### **Rechnerische Lösung durch quadratische Ergänzung:**

Zuerst formt man die Gleichung so um, dass man den Term auf der linken Seite mithilfe einer binomischen Formel in ein Quadrat verwandeln kann.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 8x - 9 &= 0 && / + 9 \\
 x^2 - 8x &= 9 && / + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 \\
 &&& \text{(Quadrat des halben Faktors von } x) \\
 x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 &= 9 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 \\
 x^2 - 8x + 4^2 &= 9 + 4^2 \\
 x^2 - 8x + 16 &= 9 + 16 && / (2. \text{ binomische Formel}) \\
 (x - 4)^2 &= 25 && / \sqrt{\phantom{x}} \\
 x - 4 &= \pm 5 && / + 4 \\
 x_1 &= +5 + 4 &= 9 \\
 x_2 &= -5 + 4 &= -1 \\
 \mathbb{L} &= \{9; -1\} \quad (\text{Schnittpunkte der Parabel mit der } x\text{-Achse})
 \end{aligned}$$

#### **Lösungsformel für quadratische Gleichungen**

Falls die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  Lösungen besitzt, erhält man:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

#### **Beispiel 1:**

$$2x^2 - 22x + 36 = 0 \quad / : 2 \quad (\text{Die Gleichung muss zuerst in die Form } x^2 + px + q = 0 \text{ gebracht werden.})$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \quad p = -11 \quad q = 18$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## 3 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

### 3.1 Vektoren

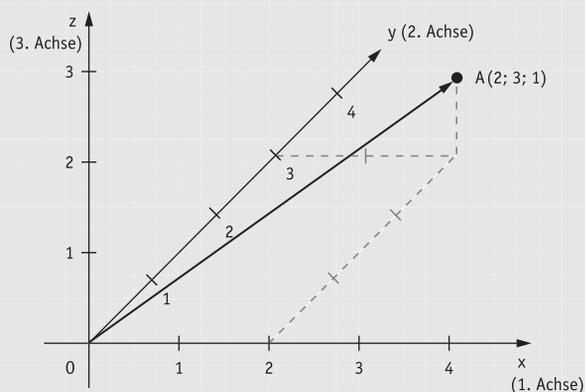
#### 3.1.1 Vektoren im Raum

Ein Vektor mit drei Komponenten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  ist ein in Spalten geschriebenes

Zahlentripel:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Der Vektor  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist **Ortsvektor** des Punkte  $A(a_1; a_2; a_3)$ .

Der Vektor  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  wird als **Nullvektor** bezeichnet.



Unter einem **Gegenvektor** eines Vektors  $\vec{a}$  versteht man einen Vektor mit der gleichen Länge, aber mit entgegengesetzter Richtung. Man bezeichnet ihn mit  $-\vec{a}$ .

$$-\vec{a} = - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \text{ ist der Gegenvektor des Vektors } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

**Beispiel:** Man bestimme jeweils die Gegenvektoren zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2a \\ -1+a \\ 3 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2a \\ -1+a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{b} = -\begin{pmatrix} -2a \\ -1+a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1-a \\ -3 \end{pmatrix}$$

### 3.1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Zwei Vektoren werden komponentenweise miteinander addiert oder subtrahiert.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{und} \quad \vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

**Beispiele:** Man berechne jeweils:

(1)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### 3.1.3 Vervielfachen von Vektoren

Vektoren werden mit einer Zahl  $k$  vervielfacht, indem jede Komponente des Vektors mit der Zahl multipliziert wird.

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix} \quad \text{Vervielfachen eines Vektors}$$

**Beispiele:**

$$(1) \quad \text{Gegeben ist der Vektor } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ man berechne } 5 \cdot \vec{a}:$$

$$\text{Lösung: } 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) Gegeben sind zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Man bestimme die Zahl  $k$  so, dass gilt:

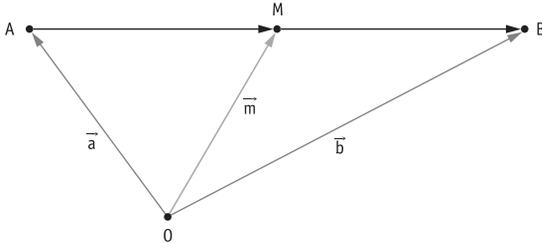
$$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$$

$$\text{gegeben: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Lösung:} & 2 \cdot k = 6 & \Rightarrow k = 3 \\ & -3 \cdot k = -9 & \Rightarrow k = 3 \\ & 4 \cdot k = 12 & \Rightarrow k = 3 \\ & \text{Kein Widerspruch} & \Rightarrow k = 3 \end{array}$$

### 3.1.4 Mittelpunkt einer Strecke

Gehören zu den Endpunkten  $A$  und  $B$  einer Strecke die Ortsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , so hat der Mittelpunkt der Strecke  $M$  den Ortsvektor:  $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$



Bei Zerlegung in eine beliebige Anzahl  $n$  gleich langer Teilstücke gilt für die Ortsvektoren der Teilpunkte  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ :

$$\vec{x}_k = \vec{a} + \frac{k}{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad k = 1, \dots, n-1$$

#### Beispiele:

(1) Die Endpunkte  $A$  und  $B$  einer Strecke haben die Ortsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Man berechne den Ortsvektor  $\vec{m}$  des Streckenmittelpunktes  $M$ .

gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

**Lösung:**  $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

(2) Von einer Strecke  $\overline{AB}$  sind der Anfangspunkt  $A$  und der Mittelpunkt  $M$  und somit ihre Ortsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{m}$  gegeben. Bestimmt werden soll der Ortsvektor zum Punkt  $B$ .

gegeben:  $A = (-2; 3; 1) \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

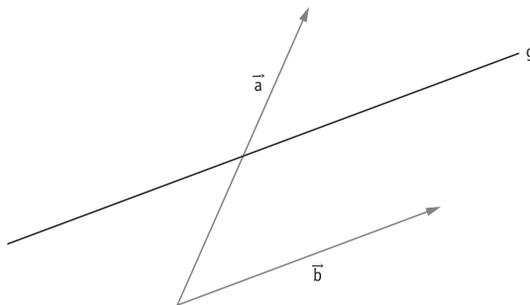
**Lösung:** Man erhält aus  $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$$\vec{b} = 2 \cdot \vec{m} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### 3.1.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Man nennt zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  voneinander *linear abhängig*, falls wenigstens einer der Vektoren eine Linearkombination (Vielfaches) der übrigen Vektoren ist. Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann *linear unabhängig*, wenn es keine Gerade gibt, zu der die Pfeile beider Vektoren parallel sind.



Voneinander linear unabhängige Vektoren

**Beispiel:** Man untersuche jeweils, ob die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  voneinander linear abhängig sind.

(1) gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Lösung:** Zu lösen ist ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten (s. a. Kap. 3.3.2, S. 167)

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit:

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & r_1 + 3r_2 + 2r_3 = 0 \quad / \cdot (-2) \\
 \text{II.} & -r_1 + 2r_3 = 0 \\
 \text{III.} & \underline{2r_1 + r_2 - r_3 = 0} \\
 \text{IV.} & 3r_2 + 4r_3 = 0 \quad / \cdot 5 \\
 \text{V.} & \underline{-5r_2 - 5r_3 = 0} \quad / \cdot (3) \\
 & 5r_3 = 0
 \end{array}$$

Es ergibt sich also die Lösung  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ . Dies bedeutet, dass die drei Vektoren voneinander linear unabhängig sind.

$$(2) \quad \text{gegeben: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Wiederum muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit:

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & r + 4s + 2t = 0 \quad / \cdot (-2) \\
 \text{II.} & 2r - 4t = 0 \\
 \text{III.} & \underline{-3r + s + 7t = 0} \\
 \text{IV.} & -8s - 8t = 0 \quad / \cdot 13 \\
 \text{V.} & \underline{13s + 13t = 0} \quad / \cdot (8) \\
 & 0 = 0
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \oplus \left. \begin{array}{l} / \cdot 3 \\ \oplus \end{array} \right]$$

Setzt man  $t = 1$ , erhält man durch Einsetzen in Gleichung V:  $s = -1$  und durch Einsetzen in Gleichung I:  $r = 2$ .

$(2; -1; 1)$  ist eine von  $(0; 0; 0)$  verschiedene Lösung, somit sind die Vektoren voneinander linear abhängig.

### 3.1.6 Betrag eines Vektors

Der Betrag  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a}$  mit  $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$  ist der Abstand der Punkte  $P$  und  $Q$  voneinander.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{Betrag eines Vektors}$$

Für  $P = (p_1; p_2; p_3)$  und  $Q = (q_1; q_2; q_3)$  gilt:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

**Beispiel:** Man bestimme die Länge der Strecke  $\overline{AB}$ .

gegeben:  $A = (2; 4; 7); \quad B = (3; -1; 1)$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(3-2)^2 + ((-1)-4)^2 + (1-7)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{62} \approx 7,87 \end{aligned}$$

## 3.2 Skalarprodukt von Vektoren

### 3.2.1 Das Skalarprodukt

Für zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  wird die Zahl

$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$  als das Skalarprodukt der beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bezeichnet.

Man schreibt:  $\vec{a} * \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

**Beispiele:** Zu berechnen sei das Skalarprodukt der beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

(1) gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \vec{a} * \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 = 2 - 8 - 4 = -10 \end{aligned}$$

(2) gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -a \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Lösung:**  $\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -a \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$= 3 \cdot (-a) + 2a \cdot 4 + (-a) \cdot (-3) = -3a + 8a + 3a = 8a$$

(3) Man bestimme im Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$  das  $x$  so, dass gilt:  $\vec{a} * \vec{b} = 0$

gegeben:  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Lösung:**  $\vec{a} * \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

$$2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + x \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{4}$$

Somit lautet der gesuchte Vektor:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

### 3.2.2 Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für alle Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  und alle reellen Zahlen  $r$  und  $s$  gilt:

(a)	$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$	<b>Kommutativgesetz</b>
(b)	$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$ $\vec{a} * (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} - \vec{a} * \vec{c}$	<b>Distributivgesetz</b>
(c)	$(r \cdot \vec{a}) * (s \cdot \vec{b}) = r \cdot s \cdot (\vec{a} * \vec{b})$	<b>wichtig:</b> *-Rechnung vor Strichrechnung

**Beispiele:** Jeweils zu berechnen sei:

(1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \text{Lösung: } & \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 & = [4 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 5] + [4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1)] \\
 & = 9 + 3 = 12
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lösung: } & \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2,2 \\ -4,4 \\ 5,5 \end{pmatrix} \\
 & = (-5) \cdot 2,2 + 3 \cdot (-4,4) + 6 \cdot 5,5 = 8,8
 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Winkel zwischen zwei Vektoren

Für je zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  (verschieden vom Nullvektor) und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel  $\alpha$  gilt:

**Winkel  $\alpha$  zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  :**

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

**Beispiele:** Man berechne jeweils den Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

$$(1) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lösung: } & \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{35}} \approx 0,157$$

$$\alpha \approx 81^\circ$$

$$(2) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} = 0$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{Die Geraden stehen senkrecht aufeinander.}$$

### 3.2.4 Orthogonale und parallele Vektoren

Für zwei Vektoren  $\vec{a} \neq \vec{b}$  und  $\vec{b} \neq 0$  gilt:

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann *orthogonal* (senkrecht) zueinander, wenn gilt:

$$\vec{a} * \vec{b} = 0$$

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann *parallel* zueinander, wenn gilt:

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} \quad (r \neq 0)$$

#### Beispiele:

(1) Es sei zu überprüfen, ob die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal oder parallel zueinander sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ -3,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**  $\vec{a} = r \cdot \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 10,5 \\ -3,5 \\ 0 \end{pmatrix} = 3,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallel zueinander.

(2) Man bestimme  $x$  so, dass die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal zueinander sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**  $\vec{a} * \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$$2x - 2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -10 \Rightarrow x = -5$$

Für  $x = -5$  sind die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal zueinander.

### 3.3 Lineare Gleichungssysteme

Eine Gleichung der Form  $2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 12$  heißt *linear*, wenn die Variablen  $x_1, x_2, x_3$  nur in der ersten Potenz auftreten. Die Zahlen 2, 7 und -3 heißen Koeffizienten der Gleichung.

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus mehreren solchen Gleichungen.

#### 3.3.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen gibt es drei Lösungsverfahren: das *Einsetzungsverfahren*, das *Gleichsetzungsverfahren* und das *Additionsverfahren*.

Die häufigste Anwendung findet das Additionsverfahren, da dieses auch bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen seine Anwendung findet (Gauß-Algorithmus).

##### 3.3.1.1 Das Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren wird eine der beiden Gleichungen nach der Variablen  $x$  oder der Variablen  $y$  umgeformt. Der Term für die umgeformte Variable wird dann in die andere Gleichung eingesetzt und diese Gleichung gelöst. So erhält man den Wert der ersten Variablen. Dieser Wert wird nun anstelle dieser Variablen in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen eingesetzt und man erhält nach Lösen dieser Gleichung den Wert der zweiten Variablen.

Die Anwendung des Einsetzungsverfahrens ist günstig, wenn eine Gleichung schon nach einer Variablen umgeformt ist.

## Stichwortverzeichnis

### A

Ableitungen 61 f., 73, 88, 91, 95, 99, 102,  
104, 106  
Ableitungsfunktionen 63  
Ableitungsregeln 63  
Abstand 146  
–, paralleler Geraden 209  
– Punkt – Ebene 204  
– Punkt – Gerade 185  
–, windschiefer Geraden 190 ff.  
Achsenabschnittsform 180, 197  
Achsensymmetrie 87, 94  
Additionsverfahren 165  
Ankathete 11  
Asymptoten 69, 85, 99  
–, horizontale 70, 93  
–, schiefe 70, 93  
–, vertikale 69, 93

### B

Betrag 146  
Binomische Formeln 5  
Brüche, addieren 2  
–, dividieren 3  
–, erweitern 2  
–, kürzen 2  
–, multiplizieren 3  
–, subtrahieren 2  
Bruchzahlen 2

### C

Cramer'sche Regel 178

### D

Definitionslücken 67  
Definitionsbereich 66  
Definitionslücken 66  
–, stetig hebbare 66  
Determinanten 175  
–, dreireihige 176  
Differenzialgleichung 1. Ordnung, lineare  
113 ff.  
– n-ter Ordnung, lineare 116  
Differenzialrechnung 54 ff.  
Differenzierbarkeit 61  
Distributivgesetz 158  
Dodekaeder 28  
Dreieck, allgemeines, Flächenberechnung 21  
–, gleichschenkliges 13  
–, rechtwinkliges 6 ff., 11 f.  
–, –, Flächenberechnung 21  
Dreiecksberechnung 14 ff.  
Drei-Punkteform 195  
Dreisatzrechnung 3  
Durchstoßpunkt 206

### E

Ebene, Achsenabschnittsform 197  
–, Drei-Punkteform 195  
–, Hesse-Normalenform 201  
–, Koordinatengleichung 196  
–, Normalenform 199  
–, parameterforme 193  
–, Punkt-Normalenform 198 f.  
Ebenengleichung 193  
Einheitskreis 146  
Einsetzungsverfahren 161  
Euler'sche Darstellung 149  
Euler'sche Formel 145 ff.  
Exponentialfunktionen 52, 98 ff.  
–, Eigenschaften 53  
Extrempunkte 88, 91, 97, 100, 102  
–, notwendige Bedingung 77  
–, relative 79  
Extremwertprobleme 107 ff.

### F

Faktorisieren 51  
Flächenberechnungen 19 ff., 125 ff.  
Flächeninhalt 1  
– zwischen zwei Kurven 130  
Flächeninhaltsfunktion 120 f.  
Flächensätze 6 ff.  
Funktion 84  
–, Achsensymmetrie 87, 94  
–, ganzrationale 84, 87  
–, gebrochenrationale 84 f., 93  
–, Hochpunkt 85  
–, lineare 124  
–, Punktsymmetrie 87, 94  
–, Tiefpunkt 85  
–, trigonometrische 102  
–, Wendepunkt 85  
Funktionen 32  
–, höherer Ordnung 42  
–, lineare 32  
–, quadratische 37 ff.  
Funktionsgleichung 105, 107

### G

Gauß-Algorithmus 167  
Gegenkathete 11  
Gegenvektor 151  
Gerade 84  
Geradengleichung 180, 189  
–, Hauptform 34  
–, Punktsteigungsform 34  
–, Zweipunkteform 34  
Gewicht 1  
Gleichsetzungsverfahren 163  
Gleichung, gemischtquadratische 41  
– höherer Ordnung 50

–, lineare 36  
 Gleichungssysteme 167  
 –, lineare 161 ff.  
 – mit einer Lösung 167  
 – mit unendlich vielen Lösungen 170  
 – ohne Lösung 170  
 Grenzwerte 54 ff.  
 –, h-Methode 57  
 –, Termumformung 56

**H**

Hesse-Normalenform 180, 201, 203  
 Hochpunkt, Funktion 85  
 –, hinreichende Bedingung 78  
 Höhensatz 9, 21  
 Hypotenuse 6

**I**

Ikosaeder 28  
 Integrale, uneigentliche 138  
 Integralfunktion 125 ff.  
 Integralrechnung 119 ff.  
 Integration durch Substitution 137  
 – partielle 135 ff.  
 Integrationsgrenzen 127  
 Integrationsintervall 127

**K**

Kathete 6  
 Kathetensatz 8, 21  
 Kegel 26  
 Kegelstumpf 27  
 Kettenregel 63, 65, 124  
 Koeffizientenbestimmung 83, 104  
 Kommutativgesetz 158  
 komplexe Zahl 141 ff.  
 –, Division 148  
 –, konjugierte 147  
 –, Multiplikation 148  
 Koordinaten, kartesische 142, 145, 147  
 Koordinatengleichung 180, 196  
 –, Kreis 212  
 –, Kugel 214  
 Kosinus 10 f.  
 Kosinussatz 17 ff.  
 Kreis, Flächenberechnung 22  
 –, Koordinatengleichung 212  
 –, Vektorgleichung 213  
 Kreisausschnitt 22  
 Kreisbogen 22  
 Kreise, Schnittpunkt zweier 217  
 Kreisgleichung 212  
 Kreisring, Flächenberechnung 22  
 Kreiszyylinder 24  
 Krümmungsverhalten 73, 80  
 Kugel 27, 214  
 –, Koordinatengleichung 214  
 –, Vektorgleichung 214

Kugelgleichung 212  
 Kurvendiskussion 66 ff., 87

**L**

Lagebeziehung von Ebenen und Kugeln 221  
 – von Geraden 186  
 – – und Kreisen 215  
 – – und Kugeln 219  
 – von Geraden und Ebenen 205  
 – von Punkten und Geraden 183  
 – von zwei Ebenen 208  
 Länge 1  
 Logarithmen 30 f.  
 Logarithmengesetze 30  
 Logarithmusfunktionen, Eigenschaften 53

**M**

Maßeinheiten 1  
 Matrizen 171  
 –, Addition 172  
 –, Multiplikation 173 f.  
 –, Vervielfachen 173  
 Matrizenschreibweise 171  
 Maximum, relatives 80  
 Minimum, relatives 80  
 Monotonie 76

**N**

Näherungskurven 69 f.  
 n-Eck, regelmäßiges, Flächenberechnung 23  
 Normalenform 180, 199  
 Normalparabel 37  
 Nullstelle 37 ff., 128  
 Nullvektor 151

**O**

Oktaeder 28  
 Orthogonalität 35  
 Ortsvektor 151, 154, 181 f., 193, 195

**P**

Parallelität 35, 189  
 Parallelogramm, Flächenberechnung 20  
 Parameter 83  
 Parameterform 180 f., 193  
 Passante 215  
 Polarkoordinaten 143 ff., 147  
 Polstellen 67  
 Polyeder, regelmäßiger 27  
 Polynomdivision 51  
 Potenzen 29  
 Potenzfunktion 42, 52  
 – mit natürlichem Exponenten 45  
 – mit negativen ganzzahligen Exponenten 47  
 – mit ungeraden  $n$  46, 48  
 Potenzgesetze 29  
 Prisma 24  
 Produktintegration 135 ff.  
 Produktregel 63 f.

Punkt-Ebene-Abstand 204  
Punkt-Gerade-Abstand 185  
Punkt-Normalenform 196, 198 f.  
Punkt-Richtungs-Form 180  
Punktsymmetrie 87, 94  
Pyramide 25  
Pyramidenstumpf 26  
Pythagoras 6, 21

**Q**  
Quader 24  
Quadrat, Flächenberechnung 19  
Quotientenregel 63 ff.

**R**  
Rauminhalt 1  
Rechteck, Flächenberechnung 19  
Regel, Cramer'sche 178  
– von Sarrus 177  
Richtungsvektor 181 f., 192 f., 195

**S**  
Sarrus 179 f.  
Sarrus'sche Regel 177  
Schachbrettregel 176  
Schnittkreis 221  
Schnittpunkt 71 ff., 88, 90, 95, 99, 187, 190  
– zweier Kreise 217  
Schnittwinkel 35, 187  
– zwischen Gerade und Ebene 206  
Sekante 215  
Sekantensteigung 61  
Sektor 22  
Sinus 10 f.  
Sinussatz 14 ff.  
Skalarprodukt 157 ff., 202  
–, Rechenregel 158  
Stammfunktion 122 ff.  
Steigung, Zwei-Punkte-Form zur Bestimmung  
61  
Stetigkeit 58  
Strecken, Länge 36  
–, Mittelpunkt 36, 154  
Substitution 50  
Substitutionsverfahren 137  
Symmetrie 87, 94, 102  
Symmetrieeigenschaft 68

**T**  
Tangens 10 f.  
Tangente 215  
Tangentengleichung 217

Tangentensteigung 62  
Tangentialebene 221, 223  
Tetraeder 27  
Tiefpunkt 85  
–, hinreichende Bedingung 79  
Trapez, Flächenberechnung 20

**U**  
Unterdeterminanten 175

**V**  
Vektoren 202  
–, Betrag 157  
–, Addition 152  
– im Raum 151  
–, lineare Abhängigkeit 155  
–, orthograde 160  
–, parallele 160  
–, Skalarprodukt 157 ff., 202  
–, Subtraktion 152  
–, Vielfache 153  
–, Winkel zwischen zwei 159  
Vektorgleichung, Kreis 213  
–, Kugel 214  
Vielecke, Flächenberechnung 19 ff.  
Viereck, allgemeines, Flächenberechnung 20  
Volumen eines Drehkörpers 139

**W**  
Wachstumsverhalten 73  
Wendepunkt 85  
Wendepunkte 80, 89, 91, 98, 100, 103  
–, hinreichende Bedingung 81  
–, notwendige Bedingung 81  
Wertebereich 37, 40, 66  
Winkel zwischen zwei Ebenen 209  
Würfel 23  
Wurzel, n-te 50  
Wurzelfunktionen 49  
Wurzeln 29

**Z**  
Zahl -1, komplexe 141 ff.  
–, –, Division 148  
–, –, konjugierte 147  
–, –, Multiplikation 148  
Zahlenebene 141  
Zeit 2  
Zielfunktion 107 ff., 112  
Zuordnungen, antiproportionale 4  
–, proportionale 3  
Zwei-Punkte-Form 180, 182